

УДК 539.4

© В. И. Смирнов, д-р техн. наук, профессор
© А. С. Кухарева, канд. техн. наук, доцент
(Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, kukhareva@pgups.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-6-56-61

© V. I. Smirnov, Dr. Sci. Tech., Professor
© A. S. Kukhareva, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, kukhareva@pgups.ru

УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ РАСТЯНУТОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ С КОНЦЕНТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

FATIGUE FRACTURE OF CIRCULAR ROD WITH A CONCENTRIC CRACK SUBJECTED TO TENSION

Дана количественная оценка влияния границ тела на прочность рельса с внутренней поперечной трещиной. В качестве приближенной модели используется круговой цилиндр с соосной круговой трещиной. Представлены результаты расчета коэффициента интенсивности напряжений (КИН) с использованием различных приемов, известных в литературе. Для приближенного расчета КИН простым и эффективным оказывается метод плоских сечений. Показано влияние поправочного множителя на максимальное значение КИН. Для сравнения приведены результаты вычислений КИН в аналогичной плоской задаче. Дана оценка остаточного ресурса конструкции по числу допустимых циклов нагружения.

Ключевые слова: круговой брус, дисковидная трещина, коэффициент интенсивности напряжений, усталостное разрушение.

The article presents a quantitative assessment of the body boundaries influence on the strength of the rail with an internal transverse crack. As an approximate model, a circular cylinder with a coaxial circular crack is used. The results of calculating the stress intensity factor (SIF) using various techniques known in the literature are submitted. For an approximate calculation of the SIF, the method of plane sections has turned out to be simple and effective. The effect of the correction factor on the maximum value of the SIF is shown. For comparison, the results of the SIF calculations in a similar 2D plane problem are presented. The residual lifetime of the structure estimated according to the number of permissible loading cycles is regarded.

Keywords: circular rod, penny-shaped crack, stress intensity factor, fatigue fracture.

В последнее время при проектировании инженерных и строительных конструкций все более широко применяются методы оценки их работоспособности на основе прогнозирования усталостных трещин. Определение периода докритического роста таких трещин имеет решающее значение для оценки ресурса работы конструкции, например железнодорожных рельсов. Основные закономерности циклической долговечности этого элемента конструкции железнодорожного пути можно установить исходя из сравнительно простых расчетных схем.

В частности, оценить аналитически влияние ограниченности размеров тела (рельса) на его трещиностойкость можно, используя известные решения задач механики разрушения. Так, в работе [1] предлагается выбирать в качестве расчетного коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для упругой полосы с поперечной краевой трещиной. Однако для внутренней поперечной трещины в головке рельса более соответствующей реальной конструкции представляется модель бесконечно длинного кругового цилиндра с соосной дисковидной трещиной под действием удаленного равномерного растя-

жения на торцах. Очевидно, что такая геометрия модели отличается от реальной геометрии рельса, однако для небольших размеров дефекта вполне приемлема и может использоваться в расчетных методиках для приближенной оценки скорости его развития.

Задача по определению КИН для цилиндра с внутренней круговой трещиной решалась разными авторами и различными методами. Числовые значения КИН в большинстве работ приводятся в виде таблиц и поэтому мало пригодны в практических расчетах. Кроме того, решение задачи в строгой постановке требует применения сложных математических методов, а получаемые результаты являются весьма громоздкими.

Анализ имеющихся решений приводит к выводу, что в данном случае целесообразно использовать простой, но очень эффективный метод определения КИН, являющийся обобщением метода плоских сечений. В известном варианте метода плоских сечений в уравнении равновесия используют только сингулярный член асимптотического разложения разрывающего напряжения на продолжении трещины. В обобщенном методе плоских сечений в условии равновесия вводится точное значение распределения напряжения в ослабленном сечении для неограниченного тела [2]. Метод выгодно отличается от других тем, что результат имеет вид конечной формулы и легко применим в последующих вычислениях.

Пусть упругий цилиндр (рис. 1) бесконечной длины диаметром $2b$ растягивается равномерным напряжением p . В цилиндре имеется соосная дисковидная трещина диаметром $2a$. Ось z направлена вдоль цилиндра.

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) можно представить в виде

$$K_I = 2p\sqrt{a/\pi}F(\alpha), \quad (1)$$

где $F(\alpha)$ — поправочная функция, учитывающая влияние границ тела, $0 \leq \alpha = a/b < 1$.

Приведем некоторые выражения для поправочной функции, полученные в аналитическом виде:

- Бородачев Н. М., Кулий М. П., 1982 [2]:

$$F_1(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\arcsin \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \right); \quad (2)$$

- Tada H., Paris P. C., Irwin G. R., 2000 [3]:

$$F_2(\alpha) = \frac{1-0,5\alpha+0,148\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha}}; \quad (3)$$

- Benthem J. P., Koiter W. T., 1973 [4]:

$$F_3(\alpha) = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{8}\alpha^2 + 0,421\alpha^3 \right) \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}(1+\alpha)}; \quad (4)$$

- Панасюк В. В., 1991 [5]:

$$F_4(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)(1+1,379\alpha)}}; \quad (5)$$

- Tada H., Paris P. C., Irwin G. R., 2000 [3]:

$$F_5(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \left[1 - 0,5\alpha + 0,340\alpha^{3,5} \right]. \quad (6)$$

Результаты расчетов по формулам (2)–(6), а также некоторые другие, полученные в табличной форме, приведены в табл. 1.

Формула (6) приведена в [3] как поправочная функция для раскрытия трещины

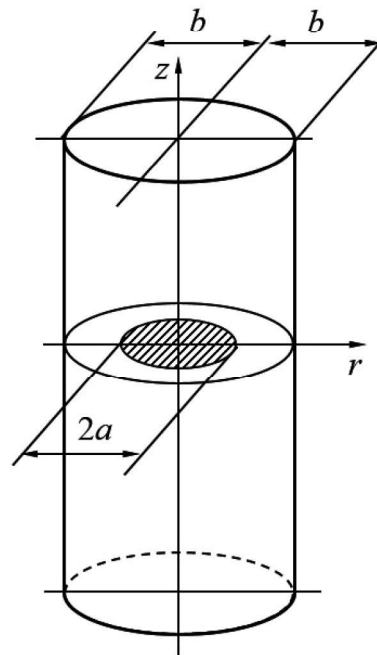


Рис. 1. Дисковидная трещина в цилиндре

Поправочная функция для КИН (цилиндр с трещиной)

Поправочная функция $F(\alpha)$							
α	Бородачев Н. М., Кулий М. П., 1982	Tada H., Paris P. C., Irwin G. R., 2000	Златин А. Н., 1978	Tsuchida E., Uchiyama T., 1980	Benthem J. P., Koiter W. T., 1973	Панасюк В. В., 1991	Tada H., Paris P. C., Irwin G. R., 2000
1	2	3	4	5	6	7	8
0,2	1,014	1,008	1,005	1,004	1,005	0,990	1,006
0,3	1,032	1,021	1,013	1,015	1,016	1,005	1,017
0,5	1,105	1,087	1,072	1,077	1,081	1,088	1,081
0,7	1,276	1,279	1,259	1,277	1,276	1,302	1,286
0,8	1,466	1,511	1,479	1,504	1,510	1,542	1,520
0,9	1,927	2,080	2,002	—	2,082	2,112	2,009

в ее центре, однако дает результаты, очень близкие к полученным в строгой математической постановке в работе [6].

Прочностные свойства металла рельсов, определенные на лабораторных образцах при статическом растяжении, не отражают специфики работы рельсов, которые эксплуатируются в условиях многократного циклического воздействия контактной нагрузки от колес подвижного состава. Одной из характеристик, определяющих эксплуатационную надежность рельсов, является их «живучесть», то есть способность выполнять свои функции после возникновения усталостной трещины в условиях циклического изгибного нагружения.

Скорость роста усталостной трещины можно оценить из выражения [7]:

$$\frac{da}{dN} = -d \left[\left(\frac{K_{I\max}}{K_{Ic}} \right)^2 + \ln \left(1 - \left(\frac{K_{I\max}}{K_{Ic}} \right)^2 \right) \right], \quad (7)$$

где $K_{I\max}$ — максимальное значение КИН в цикле; K_{Ic} — вязкость разрушения (критический КИН); d — структурный параметр размерности длины: $d = 2K_{Ic}^2 / (\pi\sigma_c^2)$ [8]; σ_c — предел прочности при растяжении.

Интегрируя уравнение (7), получаем количество циклов нагружения, необходимое для роста трещины в заданных пределах (от начала появления усталостной трещины определенного размера до того, как элемент

конструкции хрупко разрушится от этой трещины):

$$N = -\frac{1}{d} \int_{a_n}^{a_k} \frac{da}{\left(\frac{K_{I\max}}{K_{Ic}} \right)^2 + \ln \left(1 - \left(\frac{K_{I\max}}{K_{Ic}} \right)^2 \right)}, \quad (8)$$

где a_n, a_k — начальный и конечный радиусы трещины.

В табл. 2 приведены значения N , рассчитанные по формуле (8), для некоторых поправочных функций, имеющих аналитическое выражение.

Исходные данные, принятые для расчета: материал — рельсовая сталь; вязкость разрушения $K_{Ic} = 32,2 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$; предел прочности $\sigma_c = 777 \text{ МПа}$; радиус цилиндра $b = 29,737 \text{ мм}$, что соответствует площади головки рельса типа Р65; начальный радиус круговой трещины $a_n = 6,60 \text{ мм}$; конечный радиус трещины $a_k = 26,60 \text{ мм}$ (5 и 80 % от площади головки рельса соответственно); нормальное растягивающее напряжение в центре трещины $p = 13,56 \text{ МПа}$. Данное напряжение обусловлено максимальным обратным изгибающим моментом от воздействия на ось колесной пары нагрузки, равной 30,8 т. Расстояние от центра трещины до нейтральной оси рельса принято равным $H = 8,51 \text{ см}$.

Остаточный ресурс дефектного рельса — это период времени, за который трещина достигнет критического размера, при котором

Таблица 2

Допустимое количество циклов нагружения

Поправочная функция $F_i(\alpha)$	Количество циклов нагружения N
$F_1(\alpha)$	$3,039 \times 10^6$
$F_2(\alpha)$	$3,172 \times 10^6$
$F_3(\alpha)$	$3,230 \times 10^6$
$F_5(\alpha)$	$3,219 \times 10^6$

происходит полное разрушение (излом). Количественно оценивается допустимым числом циклов нагружения (можно при необходимости переводить в количество поездов, часы, сутки). Как видно из табл. 2, разница в оценке остаточного ресурса незначительна, и все рассмотренные поправочные функции могут использоваться в инженерных расчетах.

Представляет практический интерес сравнение полученной поправочной функции $F(\alpha)$ с аналогичной в плоской задаче $G(\alpha)$ — при растяжении бесконечной упругой полосы с центральной поперечной трещиной (рис. 2).

Приведем для сравнения некоторые значения поправочной функции $G(\alpha)$, полученные разными авторами:

- Бородачев Н. М., Кулий М. П., 1982 [2]:

$$G_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad 0 \leq \alpha = \frac{a}{b} < 1; \quad (9)$$

- Irwin G. R., 1958 [9] (КИН для периодически расположенных коллинеарных трещин в плоскости, см. также [10]):

$$G_2(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad (10)$$

- Isida M., 1973 [11]:

$$G_3(\alpha) = 1 + 0,5948\alpha^2 + 0,4812\alpha^4 + 0,3963\alpha^6 + 0,3367\alpha^8 + 0,2963\alpha^{10} + \dots O(\alpha^{72}), \quad (11)$$

- Браун У., Сроули Дж., 1972 [12]:

$$G_4(\alpha) = 1 + 0,128\alpha - 0,288\alpha^2 + 1,525\alpha^3; \quad (12)$$

- Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х., 1986 [13] (уточненная формула Феддерсена):

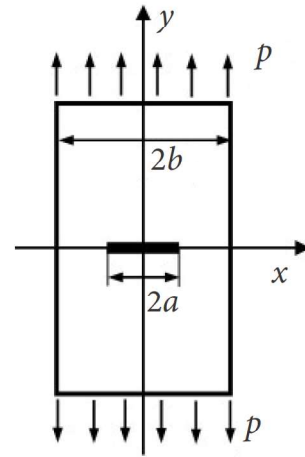


Рис. 2. Упругая полоса с центральной трещиной

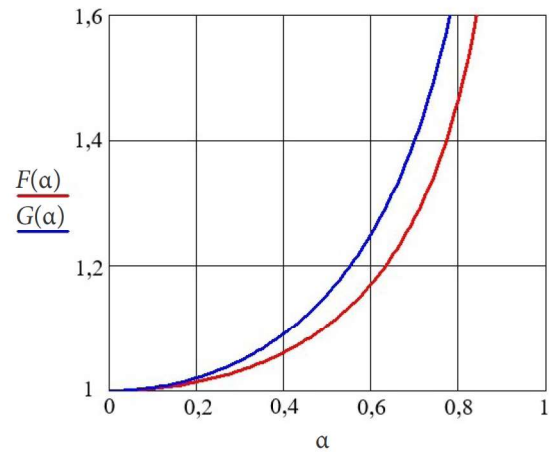


Рис. 3. Поправочные функции КИН для цилиндра с трещиной ($F(\alpha)$) и полосы с трещиной ($G(\alpha)$)

$$G_5(\alpha) = (1 - 0,025\alpha^2 + 0,06\alpha^4) \sqrt{\sec \frac{\pi\alpha}{2}}; \quad (13)$$

- Benthem J. P., Koiter W. T., 1973 [4]:

$$G_6(\alpha) = \frac{1 - 0,5\alpha + 0,326\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha}}; \quad (14)$$

- Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П., 1976 [14]:

$$G_7(\alpha) = \frac{1 + 0,0948\alpha^2 + 0,0588\alpha^4 + 0,0138\alpha^6}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (15)$$

Результаты расчетов по формулам (9)–(15) сведены в табл. 3.

Следует отметить, что для «больших» трещин ($a/b \rightarrow 1$) точность вычисления $G_3(\alpha)$ по формуле (11) быстро снижается: требуется

Поправочная функция для КИН (полоса с трещиной)

Поправочный множитель $G(\alpha)$, полоса с трещиной (номер формулы — в следующей строке)							
α	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	2	3	4	5	6	7	8
0,2	1,021	1,017	1,025	1,026	1,024	1,021	1,025
0,3	1,048	1,040	1,058	1,054	1,058	1,051	1,058
0,5	1,155	1,128	1,187	1,183	1,186	1,176	1,187
0,7	1,400	1,336	1,485	1,472	1,487	1,478	1,487
0,8	1,667	1,565	1,788	1,699	1,814	1,808	1,814
0,9	2,294	2,113	2,332	1,994	2,577	2,574	2,576

удерживать все большее число членов степенного ряда, а формула (12) в этой области дает сильно заниженную оценку. В то же время обобщенный метод плоских сечений (формулы (2) и (9)) выгодно отличается от остальных способов простотой и приемлемой точностью в инженерных расчетах.

На рис. 3 представлены графики поправочных функций $F(\alpha)$ и $G(\alpha)$, построенные по формулам (2) и (9). Как видно, в плоской задаче поправочный множитель заметно превышает аналогичный в осесимметричной задаче: так, при $\alpha = 0,75$ это превышение достигает 10 %.

Существенное влияние конечных размеров тела наблюдается при относительно больших размерах трещины в связи с увеличением значения КИН за счет поправочного

множителя $K_I^F = K_I F(\alpha)$ (рис. 4). Это, в свою очередь, влечет за собой соответствующее снижение остаточного ресурса конструкции.

Заключение

Сравнение с альтернативными методами оценки влияния границ тела на трещиностойкость, известными в литературе, показало, что обобщенный метод плоских сечений дает достаточную точность и отличается простотой и легкостью применения в инженерной практике.

Получена оценка влияния границ тела на остаточный ресурс бруса (рельса) с внутренней поперечной трещиной. Установлено, что заметное влияние конечных размеров тела наблюдается при относительно больших размерах трещины. Так, при начальном и конечном размерах трещины соответственно 45 и 70 % от площади поперечного сечения и нагрузке $P = 200$ кН циклическая прочность конструкции снижается на 70,5 %.

Библиографический список

1. Orringer O., Tang Y. H., Gordon J. E., Jeong D. Y., Morris J. M., Perlman A. B. Crack propagation life of detail fractures in rails. Final report. US Department of Transportation research and special programs, Administration Transportation systems center, Cambridge, MA 02142, October 1988. 183 p.

2. Бородачев Н. М., Кулий М. П. Обобщение метода плоских сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений // Проблемы прочности. 1982. № 2. С. 23–27.

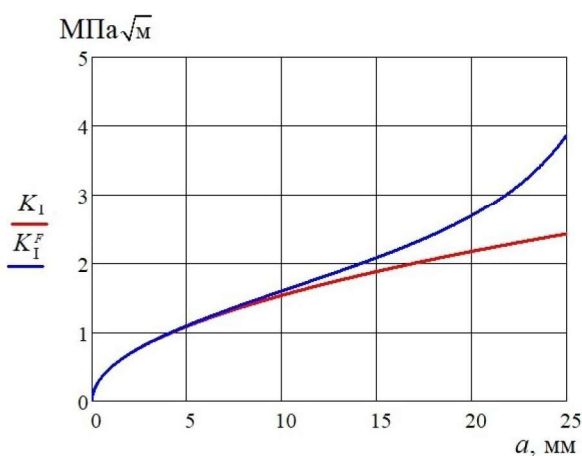


Рис. 4. Влияние поправочного множителя (индекс F) на КИН

3. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks handbook. 3rd edition. New York: ASME Press, 2000. 698 p.

4. Benthem J. P., Koiter W. T. Asymptotic approximations to crack problems // Sih G. C. (Ed.). *Mechanics of Fracture, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*. Vol. 1. The Netherlands, Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973. Pp. 131–178.

5. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.

6. Златин А. Н. Растяжение цилиндра, содержащего периодически расположенные дискообразные трещины // Доклады АН СССР. 1978. Т. 241, № 6. С. 1300–1302.

7. Смирнов В. И., Видюшенков С. А., Майер С. С. Усталостное разрушение балки с внутренней поперечной трещиной при многоцикловом нагружении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 2 (79). С. 75–81.

8. Петров Ю. В., Смирнов В. И. О прочности материалов с малыми дефектами // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 165–177.

9. Irwin G. R. Fracture // *Handbuch der Physik / Encyclopedia of Physics*. Vol. 3/6. Berlin: Springer Verlag, 1958. Pp. 551–590.

10. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения: сб. ст. под ред. Б. А. Дроздовского. М.: Мир, 1968. С. 64–142.

11. Isida M. Analysis of stress intensity factors for the tension of a centrally cracked strip with stiffened edges // *Engineering Fracture Mechanics*. 1973. Vol. 5, № 3. Pp. 647–665.

12. Браун У., Сроули Дж. Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации. М.: Мир, 1972. 246 с.

13. Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения / пер. с яп. С. Л. Масленникова; под ред. Е. М. Морозова. М.: Мир, 1986. 334 с.

14. Панасюк В. В., Саврук М. П., Датышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 444 с.

References

1. Orringer O., et al. *Crack propagation life of detail fractures in rails*. Final report. US Department of Transportation research and special programs, Administration Transportation systems center, Cambridge, MA 02142, October 1988, 183 p.

2. Borodachev N. M., Kuliya M. P. *Obobshchenie metoda ploskikh secheniy dlya opredeleniya koeffitsienta intensivnosti napryazheniy* [Generalization of the method of plane sections for determination of stress intensity

factor]. *Problemy prochnosti – Problems of Strength*, 1982, no. 2, pp. 23–27.

3. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks. Handbook. 3rd ed. New York, ASME Press, 2000, 698 p.

4. Benthem J. P., Koiter W. T. Asymptotic approximations to crack problems. Sih G. C. (Ed.). *Mechanics of Fracture, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*. Vol. 1. The Netherlands, Leyden, Noordhoff International Publ., 1973, pp. 131–178.

5. Panasyuk V. V. *Mekhanika kvazikhрупкого razrusheniya materialov* [Mechanics of quasi-brittle fracture of materials]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1991, 416 p.

6. Zlatin A. N. *Rastyazhenie tsilindra, sodержashchego periodicheski raspolozhennyye diskoobraznyye treshchiny* [Tension of a cylinder containing periodically located disk-shaped cracks]. *Doklady AN SSSR – Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1978, vol. 241, no. 6, pp. 1300–1302.

7. Smirnov V. I., Vidyushenkov S. A., Maier S. S. *Ustalostnoe razrushenie balki s vnutrenney poperechnoy treshchinoy pri mnogotsiklovom nagruzhenii* [Fatigue fracture of the beam with an internal transverse crack under multicycle loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 2 (79), pp. 75–81.

8. Petrov Yu. V., Smirnov V. I. *O prochnosti materialov s malymi defektami* [Regarding the strength of materials with small defects]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the RAN. Mechanics of Solid Body*, 2006, no. 4, pp. 165–177.

9. Irwin G. R. Fracture. *Handbuch der Physik. Encyclopedia of Physics*, Vol. 3/6. Berlin, Springer Verlag, 1958, pp. 551–590.

10. Paris P., Si Dzh. *Analiz napryazhennogo sostoyaniya okolo treshchin* [Analysis of the stress state near cracks]. *Sb. st. «Prikladnye voprosy vyazkosti razrusheniya»* [Coll. of articles “Applied issues of fracture toughness”]. Ed. by Drozdovskiy B. A. Moscow, Mir Publ., 1968, pp. 64–142.

11. Isida M. Analysis of stress intensity factors for the tension of a centrally cracked strip with stiffened edges. *Engineering Fracture Mechanics*, 1973, vol. 5, no. 3, pp. 647–665.

12. Braun U., Srouli Dzh. *Ispytaniya vysokoprochnykh metallicheskikh materialov na vyazkost' razrusheniya pri ploskoy deformatsii* [Tests of high-strength metallic materials for fracture toughness under plane deformation]. Moscow, Mir Publ., 1972, 246 p.

13. Siratori M., Miyosi T., Matsusita Kh. *Vychislitel'naya mekhanika razrusheniya* [Computational Fracture Mechanics]. Transl. from Japanese by Maslennikov S. L. Ed. by Morozov E. M. Moscow, Mir Publ., 1986, 334 p.

14. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses near cracks in plates and shells]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1976, 444 p.