

УДК 539.3+539.4+539.5

© Ю. А. Гурьева, канд. техн. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: yual2017@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-4-124-129

© Yu. A. Guryeva, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: yual2017@mail.ru

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЙ СТЕРЖЕНЬ, ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫЙ ДЛИТЕЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКОЙ, В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

COMPRESSION OF REINFORCED CONCRETE BAR SUBJECTED TO CONSTANT LOAD IN CONDITION OF NONLINEAR CONCRETE CREEP

Рассматривается решение задачи о центральном сжатии железобетонного жесткого стержня с помощью теории нелинейной ползучести бетона, предложенной автором ранее. Приведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, центральное сжатие, железобетонный стержень.

The paper presents the solution of the problem of stiff homogeneous reinforced concrete bar compression by means of the nonlinear concrete creep theory proposed by the author previously. The analysis of the obtained results is submitted.

Keywords: nonlinear creep, central compression, reinforced concrete bar.

Вертикальная сила P приложена в центре тяжести поперечного сечения стержня и вызывает осевое сжатие. Напряжения сжатия принимают положительные.

Согласно условию равновесия,

$$\sigma_b(t)A_b + \sigma_a(t)A_a = P, \quad (1)$$

где $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ — сжимающие напряжения в бетоне и арматуре соответственно; A_b — площадь бетона; A_a — площадь арматуры в поперечном сечении стержня.

После приложения нагрузки P оба элемента работают совместно:

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_a(t), \quad (2)$$

$\varepsilon_b(t)$ — относительная деформация бетонной части стержня; $\varepsilon_a(t)$ — относительная деформация арматуры в момент времени t .

Полная деформация $\varepsilon_b(t)$ бетона складывается из упругой деформации $e_b(t)$, деформации линейной ползучести $\alpha(t)$ (теория упругой наследственности, полная обратимость) и необратимой деформации нелинейной ползучести $\beta(t)$:

$$\varepsilon_b(t) = e_b(t) + \alpha(t) + \beta(t); \quad (3)$$

$$e_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b}; \quad (4)$$

$$\alpha(t) = - \int_0^t \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} \sigma_b(\tau) d\tau; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= k_1 k_2 \frac{\sigma_b(t) / R_b}{1 - k_1 k_2 \sigma_b(t) / R_b} \dot{\alpha}(t) = \\ &= k_1 k_2 \frac{s_b(t)}{1 - k_1 k_2 s_b(t)} \dot{\alpha}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где R_b — прочность бетона на сжатие; s_b — относительное напряжение в бетоне.

Из уравнения (3) с учетом (4), (6) получаем

$$\frac{\dot{\sigma}_b(t)}{E_b} + \dot{\alpha}(t) + k_1 k_2 \frac{\sigma_b(t)}{R_b - k_1 k_2 \sigma_b(t)} \dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\sigma}_a(t)}{E_a} \quad (7)$$

или с учетом (1)

$$[1 - k_1 k_2 s_b(t)] \dot{s}_b(t) + \frac{E_b}{R_b} \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} \dot{\alpha}(t) = 0. \quad (8)$$

Учитывая $\alpha(0) = 0$, после интегрирования получим

$$\begin{aligned} s_b(t) - s_b(0) - k_1 k_2 \frac{s_b^2(t) - s_b^2(0)}{2} + \\ + \frac{E_b}{R_b} \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} \alpha(t) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя выражение (5) для деформации линейной ползучести $\alpha(t)$, приходим к нелинейному интегральному уравнению:

$$s_6(t) - k_1 k_2 \frac{s_6^2(t)}{2} - \frac{E_6}{R_6} \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_6 A_6} \int_0^t \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} s_6(\tau) d\tau = s_6(0) - k_1 k_2 \frac{s_6^2(0)}{2}. \quad (10)$$

Решение задачи для $t \rightarrow \infty$

Интеграл из уравнения (10) разобьем на две части:

$$\int_0^t \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} s_6(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} s_6(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} s_6(\tau) d\tau \Big|_{t \rightarrow \infty}. \quad (11)$$

В соответствии с приемом, предложенным и используемым В. Д. Харлабом [1, 2], предполагается, что ко времени t_1 процесс ползучести может считаться завершенным. Тогда первый интеграл в правой части (11) обращается в ноль (так как при конечном τ и бесконечно большом t мера ползучести $C(t-\tau) = C_\infty = \text{const}$), а во втором интеграле $s_6(\tau) = \text{const} = s(\infty)$. В результате получаем квадратное уравнение

$$s_6^2(\infty) - 2 \frac{1 + \Phi_\infty}{k_1 k_2} s_6(\infty) - s_6^2(0) + 2 \frac{1}{k_1 k_2} s_6(0) = 0, \quad (12)$$

где

$$\Phi_\infty = \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_6 A_6} \phi_\infty. \quad (13)$$

Здесь $\phi_\infty = EC_\infty$ — предельная характеристика линейной ползучести бетона.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$s_6(\infty) = \frac{1 + \Phi_\infty}{k_1 k_2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \Phi_\infty}{k_1 k_2} \right)^2 + s_6^2(0) - 2 \frac{s_6(0)}{k_1 k_2}}. \quad (14)$$

Перед корнем удержан знак минус, поскольку при $s \rightarrow 0$ правая часть (14) должна обращаться в ноль.

Выражение (14) для определения уровня напряжений в бетоне железобетонного стержня имеет тот же алгебраический вид, что и уравнение, полученное при решении автором задачи о потерях предварительного напряжения арматуры [4–6].

Начальные условия для относительного напряжения (уровня напряжения) в бетоне для железобетонного стержня с ненапряженной арматурой:

$$s_6(0) = \frac{E_6}{R_6} \frac{P}{E_a A_a + E_6 A_6}. \quad (15)$$

Напряжения в арматуре выразим из уравнения равновесия (1):

$$\sigma_a(\infty) = \frac{P}{A_a} - \sigma_6(\infty) \frac{A_6}{A_a},$$

$$s_a(\infty) = \frac{P}{R_a A_a} - s_6(\infty) \frac{A_6}{A_a} \frac{R_6}{R_a}. \quad (16)$$

Положив $k_1 k_2 = 0$ в уравнении (14), получаем решение задачи на основе линейной теории ползучести:

$$s_6(\infty) = \frac{s_6(0)}{1 + \Phi_\infty},$$

$$s_a(\infty) = \frac{P}{R_a A_a} - s_6(\infty) \frac{A_6}{A_a} \frac{R_6}{R_a}. \quad (17)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1 и 2. Принято:

$$E_6 = 352 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2; R_6 = 180 \text{ кгс/см}^2;$$

$$E_a = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2; R_6 = 10 \text{ 750 кгс/см}^2;$$

$$A_a = 20 \text{ см}^2.$$

Решение задачи для произвольного момента времени t

Из уравнения (8) получаем решение нелинейной задачи:

$$\dot{s}_6(t) = \frac{\Phi_\infty \gamma}{1 - k_1 k_2 s_6(t)} \left[\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s_6(\tau) d\tau - s_6(t) \right]. \quad (18)$$

Для решения задачи с учетом только линейной ползучести необходимо принять $k_1 k_2 = 0$ в уравнении (18):

$$\dot{s}_6(t) = \Phi_\infty \gamma \left[\gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s_6(\tau) d\tau - s_6(t) \right]. \quad (19)$$

Начальный уровень напряжений в бетоне $s_6(0)$ определяется также из уравнения (15).

Для определения уровня напряжений в арматуре используем выражение, полученное из уравнения равновесия (1):

$$s_a(t) = \frac{P}{R_a A_a} - s_6(t) \frac{A_6}{A_a} \frac{R_6}{R_a}. \quad (20)$$

Результаты численного решения уравнений (18)–(20) представлены на рис. 1, 2 при следующих исходных данных:

$$\phi = 3; \gamma = 0,01 \text{ сут}^{-1}; k_1 k_2 = 1; E_6 = 352 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2;$$

$$R_6 = 180 \text{ кгс/см}^2; E_a = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2;$$

$$R_6 = 10 \text{ 750 кгс/см}^2; A_a / A_6 = 0,02; A_a = 20 \text{ см}^2.$$

Таблица 1

Изменение напряжений в бетоне относительно начального момента времени $s_6(\infty)/s_6(0)$

Теория	A_a/A_6	k_1k_2	ϕ_∞	Начальное напряжение в бетоне $s_6(0)$						
				0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
				Соответствующая нагрузка $P \times 10^{-3}$, кгс						
				19,84	39,68	59,52	79,36	99,20	119,05	138,89
Линейная	0,02		1	0,915						
			2	0,843						
			3	0,782						
Нелинейная	0,02	1	1	0,907	0,897	0,885	0,871	0,853	0,829	0,800
			2	0,830	0,815	0,797	0,776	0,752	0,723	0,688
			3	0,766	0,748	0,727	0,703	0,676	0,645	0,611
		1,25	1	0,905	0,892	0,875	0,853	0,823	0,782	0,725
			2	0,827	0,807	0,782	0,752	0,714	0,669	0,613
			3	0,762	0,738	0,709	0,676	0,637	0,592	0,540
		1,5	1	0,902	0,885	0,862	0,829	0,782	0,712	0,618
			2	0,823	0,797	0,765	0,723	0,669	0,601	0,521
			3	0,757	0,727	0,690	0,645	0,592	0,529	0,458

Таблица 2

Изменение напряжений в арматуре относительно начального момента времени $s_a(\infty)/s_a(0)$

Теория	A_a/A_6	k_1k_2	ϕ_∞	Начальный уровень напряжения в арматуре $s_a(0)$						
				0,009	0,017	0,026	0,034	0,043	0,051	0,060
				Соответствующий начальный уровень напряжения в бетоне $s_6(0)$						
				0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
				Соответствующая нагрузка $P \times 10^{-3}$, кгс						
				19,84	39,68	59,52	79,36	99,20	119,05	138,89
Линейная	0,02		1	1,830						
			2	2,530						
			3	3,131						
Нелинейная	0,02	1	1	1,910	2,005	2,120	2,262	2,441	2,668	2,960
			2	2,658	2,807	2,981	3,185	3,427	3,713	4,051
			3	3,287	3,466	3,670	3,902	4,167	4,468	4,808
		1,25	1	1,932	2,059	2,224	2,441	2,734	3,136	3,685
			2	2,694	2,891	3,131	3,427	3,792	4,241	4,782
			3	3,330	3,565	3,841	4,167	4,549	4,994	5,501
		1,5	1	1,955	2,120	2,346	2,668	3,136	3,815	4,732
			2	2,730	2,981	3,301	3,713	4,241	4,901	5,686
			3	3,374	3,670	4,030	4,468	4,993	5,609	6,304

Полученные результаты (табл. 1, 2, рис. 1, 2) позволяют сделать следующие выводы:

1. Напряжения в бетоне $\sigma_6(t)$ с течением времени постепенно убывают, причем чем выше начальный уровень напряжений $s_6(0)$, тем больше составляет снижение величины напряжения

с течением времени. Подобное поведение наблюдается и в задаче о железобетонном стержне с предварительно напряженной арматурой [4–6].

2. В то же время напряжения в арматуре $\sigma_a(t)$ железобетонного стержня возрастают тем быстрее, чем выше первоначальный уровень напря-

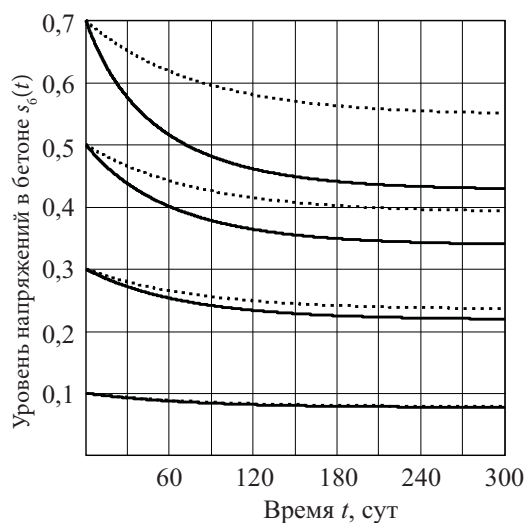


Рис. 1. Изменение уровня напряжений в бетоне $s_b(t) = \sigma_b(t)/R_b$: сплошные линии — нелинейная теория, штриховые — линейная

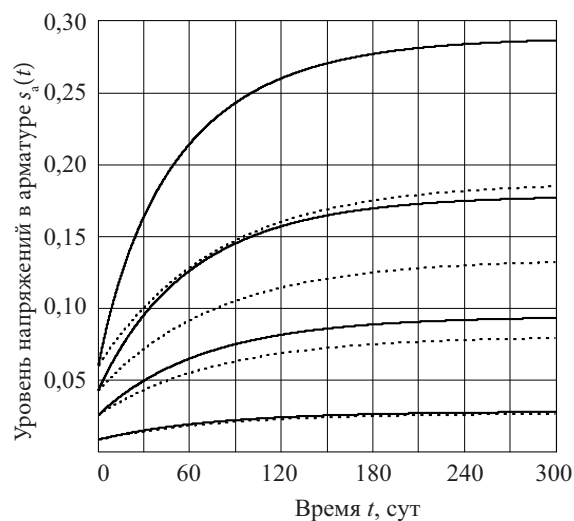


Рис. 2. Изменение уровня напряжений в арматуре $s_a(t) = \sigma_a(t)/R_a$: сплошные линии — нелинейная теория, штриховые — линейная

жений в арматуре $s_a(0)$ в момент приложения нагрузки. В задаче о железобетонном стержне с предварительно напряженной арматурой [4–6], напротив, происходит уменьшение напряжений в арматуре с течением времени.

3. Представленный результат подтверждает, что деформации нелинейной ползучести оказывают большое влияние на изменение напряжений в арматуре $\sigma_a(t)$ стержня с ненапряженной арматурой.

Используя предварительно напряженную арматуру, можно значительно снизить указанное отрицательное влияние нелинейной ползучести бетона на изменение напряжений в арматуре.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности нестареющего бетона при сжатии // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. тематич. сб. тр. ЛИСИ. 1980. Вып. 13. С. 137–148.
2. Харлаб В. Д. Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону). СПб.: СПбГАСУ, 2014. 207 с.
3. Харлаб В. Д., Гурьева Ю. А. Теория нелинейной ползучести и длительной прочности нестареющего бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2007. № 3 (12). С. 19–21.
4. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2008. № 2 (15). С. 37–41.

5. Гурьева Ю. А. Некоторые приложения упрощенной теории нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии // Промышленное и гражданское строительство. 2008. № 6. С. 52–53.

6. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии: дис. ... канд. техн. наук // СПб., 2009. 101 с.

7. Гвоздев А. А. О пересмотре способов расчета железобетонных конструкций и о первых его результатах // Сектор бетона, железобетонных и каменных конструкций. М.; Л.: ЦНИПС, 1934. 51 с.

8. Яценко Е. А. Ползучесть бетона и железобетонных конструкций: конспект лекций // Днепропетровский ин-т инж. ж.-д. транспорта, кафедра строит. конструкций. Днепропетровск, 1973. 97 с.

9. Беглов А. Д., Санжаровский Р. С. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и Евростандарты. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 221 с.

10. Бондаренко В. М., Бондаренко С. В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. М.: Стройиздат, 1982. 287 с.

11. Буданов Н. А. Расчет железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона. М.; Л.: Стройиздат, 1949. 116 с.

12. Галустов К. З. Развитие нелинейной теории ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2006. 248 с.

13. Котов А. А. Расчет железобетонных элементов с учетом кратковременных и длительных нелинейных процессов: дис. ... канд. техн. наук. Л., 1985. 182 с.

14. Лившиц Я. Д. Расчет железобетонных конструкций с учетом влияния усадки и ползучести бетона. Киев: Вища школа, 1971. 230 с.

15. Панарин Н. Я. Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести. М.; Л.: Госстройиздат, 1957. 75 с.

16. Родов Г. С. Результаты опытов по определению деформаций усадки и ползучести бетона в предварительно напряженных железобетонных элементах // тр. Ин-та антисейсмич. стр-ва Акад. наук Туркм. ССР. Ашхабад, 1956. Вып. 1.

17. Санжаровский Р. С. О некоторых моделях и гипотезах теории железобетона // Исследования по расчету строительных конструкций (Статика и динамика сложных механических систем и строительных конструкций): межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1979. С. 27–34.

18. Улицкий И. И. Влияние длительных процессов на напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций. Киев: Акад. стр-ва и архитектуры УССР, 1962. 36 с.

19. Улицкий И. И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. Киев: Будівельник, 1967. 347 с.

References

1. Kharlab V. D. *Ehnergeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti nestareyushchego betona pri szhatii* [The power theory of nonlinear creep of non-ageing concrete at compression]. *Trudy Mezhdvuz. tematich. conf. «Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred»* [Proc. of the Inter-higher education institutions thematic conf. "Mechanics of rod systems and continuous environment"]. LISI Publ., 1980, iss. 13, pp. 137–148.

2. Kharlab V. D. *Printsipial'nye voprosy lineynoy teorii polzuchesti (s privyazkoy k betonu)* [Fundamental issues of the linear creep theory (in regard to concrete)]. St. Petersburg, SPSUACE Publ., 2014, 207 p.

3. Kharlab V. D., Guryeva Yu. A. *Teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti nestareyushchego betona pri szhatii* [The theory of nonlinear creep and long durability of ageless concrete at compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2007, no. 3 (12), pp. 19–21.

4. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti betona pri szhatii* [A simplified theory of nonlinear creep of concrete under compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2008, no. 2 (15), pp. 37–41.

5. Guryeva Yu. A. *Nekotorye prilozheniya uproshchennoy teorii nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii* [Some applications of the simplified theory of nonlinear creep of ageless concrete at compression].

Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and civil engineering, 2008, no. 6, pp. 52–53.

6. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii. Diss. kand. tekhn. nauk.* [Simplified theory of nonlinear creep of non-ageing concrete at compression. PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2009, 101 p.

7. Gvozdev A. A. *O peresmotre sposobov rascheta zhelezobetonnykh konstruktсий i o pervykh ego rezul'tatakh* [About revision of the ways of calculating reinforced concrete designs and its first results]. *Sektor betona, zhelezobetonnykh i kamennykh konstruktсий* [Sector of concrete, reinforced concrete and stone designs]. Moscow, Leningrad, TsNIPS Publ., 1934, 51 p.

8. Yatsenko E. A. *Polzuchest' betona i zhelezobetonnykh konstruktсий: konspekt lektsiy* [Creep of concrete and reinforced concrete designs. Lecture notes]. Dnepropetrovsk, Dnepropetrovsk Institute of Railway Transport Publ., 1973, 97 p.

9. Beglov A. D., Sanzharovskiy R. S. *Teoriya rascheta zhelezobetonnykh konstruktсий na prochnost' i ustoychivost'. Sovremennye normy i Evrostandarty* [The theory of calculation of reinforced concrete designs on durability and stability. Modern norms and European standards.]. St. Petersburg, SPSUACE Publ., 2006, 221 p.

10. Bondarenko V. M., Bondarenko S. V. *Inzhenernye metody nelineynoy teorii zhelezobetona* [Engineering methods of the nonlinear theory of reinforced concrete]. Moscow, Stroyizdat, 1982, 287 p.

11. Budanov N. A. *Raschet zhelezobetonnykh konstruktсий s uchetom polzuchesti betona* [Calculation of reinforced concrete designs taking into account the creep of concrete]. Moscow, Leningrad, Stroyizdat Publ., 1949, 116 p.

12. Galustov K. Z. *Razvitie nelineynoy teorii polzuchesti betona i raschet zhelezobetonnykh konstruktсий* [Development of the nonlinear theory of concrete creep and calculation of reinforced concrete designs]. Moscow, Fiz.-Mat. Lit. Publ, 2006, 248 p.

13. Kotov A. A. *Raschet zhelezobetonnykh ehlementov s uchetom kratkovremennykh i dlitel'nykh nelineynykh protsessov. Diss. kand. tekhn. nauk* [Calculation of reinforced concrete members taking into account short-term and long-term nonlinear processes. PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1985, 182 p.

14. Livshits Ya. D. *Raschet zhelezobetonnykh konstruktсий s uchetom vliyaniya usadki i polzuchesti betona* [Calculation of reinforced concrete designs taking into account the effect of concrete shrinkage and creep]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1971, 230 p.

15. Panarin N. Ya. *Nekotorye voprosy rascheta armirovannogo i nearmirovannogo betona s uchetom polzuchesti* [Some issues of calculating reinforced and not reinforced concrete taking into account concrete creep]. Moscow, Leningrad, Gosstroyizdat Publ., 1957, 75 p.

16. Rodov G. S. *Rezultaty opytov po opredeleniyu deformatsiy usadki i polzuchesti betona v predvaritel'no napryazhennykh zhelezobetonnykh ehlementakh* [Test results by evaluating the deformations of concrete shrinkage and creep in pre-stressed reinforced concrete members]. *Trudy Instituta Antiseismich. Stroitel'stva Akad. Nauk SSR* [Proc. of the Institute of Aseismic Structures, Academy of Sciences, Turkmen SSR], Ashkhabad, 1956, iss. 1.

17. Sanzharovskiy R. S. *O nekotorykh modelyakh i gipotezakh teorii zhelezobetona* [About some models and hypotheses of the reinforced concrete theory]. *Trudy Mezhvuz. tematich. conf. «Issledovaniya po raschetu stroitel'nykh konstruktsiy (Statika i dinamika slozhnykh mekhanicheskikh sistem i stroitel'nykh konstruktsiy)»* [Proc. of the Inter-higher education institution thematic conf.

"Research works on calculation of building constructions (Statics and dynamics of difficult mechanical systems and building constructions)"]. Leningrad, LISI Publ., 1979, pp. 27–34.

18. Ulitskiy I. I. *Vliyanie dlitel'nykh protsessov na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie zhelezobetonnykh konstruktsiy* [Long-term processes' effect on the intense deformed condition of reinforced concrete structures]. Kiev, Academy of Construction and Architecture USSR Publ., 1962, 36 p.

19. Ulitskiy I. I. *Teoriya i raschet zhelezobetonnykh sterzhnevyykh konstruktsiy s uchetom dlitel'nykh protsessov* [The theory and calculation of reinforced concrete rod designs taking into account long-term processes]. Kiev, Budivel'nik Publ., 1967, 347 p.