

УДК 539.3

© Л. М. Кэган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-4-130-134

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

РАЗВИТИЕ ПРИКЛАДНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

DEVELOPMENT OF THE APPLIED APPROACH TO ANALYSIS OF RODS SUBJECTED TO BENDING AND COMPRESSION

Известная приближенная формула вычисления изгибающих моментов в сжато-изогнутом стержне обобщается на случай статически неопределимого стержня, нагруженного распределенной вдоль его оси сжимающей силой. Точность предлагаемой формулы соответствует точности инженерного расчета. При постоянном сечении стержня и его сжатии нагрузкой в 90 % от критической погрешность момента составляет примерно 3 % для статически определимого стержня, примерно 6 % — для статически неопределимого стержня.

Ключевые слова: продольно-поперечный изгиб, вычисление усилий, статически неопределимые стержни.

The well-known approximate formula for calculating bending moments in rods under bending and compression is generalized to the case of a statically indeterminate rod loaded with a compressive force distributed along the rod. The accuracy of the proposed formula corresponds to the accuracy of engineering calculations. For the rod of constant cross-section compressed by the load amounting to 90% of a critical one, the moment error is about 3% for a statically determinate rod, about 6% for a statically indeterminate rod.

Keywords: longitudinal-transverse bending, calculation of internal forces, statically indeterminate rods.

Изгибающие моменты в сжато-изогнутом стержне часто достаточно вычислить с инженерной степенью точности. Методы такого вычисления опираются на приближенную формулу для прогиба w

$$w = \eta w^0, \quad \eta = \frac{1}{1 - P/P_{кр}}, \quad (1)$$

которая применима к стержню, сжатому силой P на торце и испытывающему плоский прямой изгиб. В ней $P_{кр}$ — критическая сила Эйлера. Верхний индекс «нуль» здесь и далее означает вычисление в отсутствие сжатия.

Формула (1) известна давно¹. Она применяется в инженерных расчетах в случае произ-

вольного закрепления стержня, обладает инженерной точностью, если изогнутая ось стержня по форме не слишком далека от изгиба при потере устойчивости. (Для шарнирно закрепленного стержня, изогнутого равномерно распределенной нагрузкой и сжатого силой $P = 0,95P_{кр}$, погрешность составляет всего 0,4 %.) Формула позволяет определять моменты M в статически определимых стержнях. Для стержня на двух шарнирных опорах имеем

$$M = M^0 + P\eta w^0. \quad (2)$$

Для консольного стержня:

$$M = M^0 + P\eta(w^0 - w_1^0). \quad (3)$$

Здесь и далее нижними индексами «нуль» и «один» отмечены величины, вычисленные соответственно в начале координат и на противоположном торце стержня (рис. 1).

¹ Согласно [1], уравнение (1) получено Томасом Юнгом ([2], 1807 г.), что, по мнению автора, не совсем верно. Юнг пишет следующее ([2], пункт 323, перевод автора):

Когда балка в естественном состоянии имеет ту же форму, что призматическая балка, слегка изогнутая продольными силами, обозначая за b высоту, за c длину окружности круга диаметром в единицу, за m вес модуля упругости, за d начальное отклонение от прямолинейной формы, за f силу, приложенную к концам оси, получаем общее отклонение от прямолинейной формы в виде

$$a = \frac{bbccdm}{bbccm - 12eef}. \quad (*)$$

В привычных обозначениях $c = \pi$, $m = EA$, $e = l$, $b = h$. Положив $d = w^0$, после деления на $bbccdm$ и учитывая $12l^2 / (\pi^2 h^2 EA) = 1/P_{кр}$, действительно получаем формулу (1). Однако результат (*) не относится к действию на стержень поперечной нагрузки.

Для статически неопределимых стержней уравнения, подобные (2), (3), отсутствуют. Часто применяется зависимость

$$M = \eta M^0, \quad (4)$$

не всегда обладающая инженерной точностью.

Предлагаемая работа обобщает простые формулы (2), (3), во-первых, на случай статически неопределимого стержня, во-вторых, на случай изменяющейся вдоль стержня сжимающей нагрузки. Более точная приближенная теория (одновременно и более сложная), справедливая для любого закона распределения поперечной нагрузки, предложена в [3].

Стержень, нагруженный силой на торце

Стержень имеет переменное сечение, показан на рис. 1. Опорные связи присутствуют только на его торцах. S_0 — опорный момент в начале координат, H_0 — горизонтальная реакция (не совпадает с поперечной силой).

Приближенная формула конструируется сразу для момента M без предварительного вычисления прогиба w . EI — жесткость стержня переменного сечения.

Отправной точкой служит дифференциальное уравнение изгиба, записанное в двух разных формах [4]:

$$M'' + \frac{P}{EI} M = -q, \quad (5)$$

$$M = -EIw'' \quad (6)$$

и дополненное силовыми граничными условиями для статически определимого стержня, для статически неопределимого стержня — силовыми и кинематическими условиями.

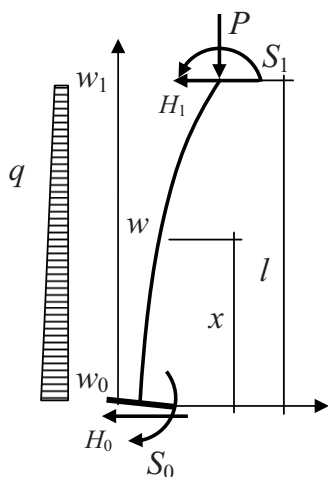


Рис. 1

Отыскиваемый момент M записывается в виде суммы двух слагаемых:

$$M = M^0 + \Delta M. \quad (7)$$

Слагаемое M^0 есть решение задачи о поперечном изгибе, удовлетворяет уравнению

$$M''^0 = -q. \quad (8)$$

Слагаемое ΔM есть поправка за счет силы P . Оба слагаемых подчинены одним и тем же граничным условиям.

Объединение (6)–(8) устанавливает связь между ΔM и M^0 :

$$\Delta M'' + \frac{P}{EI} \Delta M = -\frac{P}{EI} M^0. \quad (9)$$

За счет момента ΔM изменяются опорные реакции H_0, S_0 . В упругом стержне при малых перемещениях поправки $\Delta H, \Delta S$ к реакциям пропорциональны силе P : $\Delta H = Pb, \Delta S = Pa$.

Следствием условий равновесия является следующее точное уравнение:

$$\Delta M = P[(w - w_0) + a + bx]. \quad (10)$$

Прогиб w далее разбивается на два слагаемых $w = w^0 + \Delta w$. За a^0, b^0 обозначаются постоянные a, b , связанные с прогибом w^0 , вводится поправка первого приближения

$$\Delta_1 M = P(\Delta w^0 + a^0 + b^0 x), \Delta w^0 = w^0 - w_0^0, \quad (11)$$

а поправка ΔM записывается в виде суммы:

$$\Delta M = \Delta_1 M + \Delta_2 M. \quad (12)$$

Согласно (6), (11) $\Delta_1 M'' = -\frac{P}{EI} M^0$, так что уравнение (9) дает:

$$\Delta_2 M'' + \frac{P}{EI} \Delta_2 M = -\frac{P}{EI} \Delta_1 M. \quad (13)$$

Последнее уравнение является точным, предложено в работе [3]. Решается оно приближенно.

Пусть $M_{уст}$ — форма момента при потере устойчивости, удовлетворяющая однородному дифференциальному уравнению

$$M_{уст}'' + \frac{P_{кр}}{EI} M_{уст} = 0 \quad (14)$$

с соответствующими граничными условиями. Поправка $\Delta_2 M$ считается пропорциональной $M_{уст}$:

$$\Delta_2 M = C M_{уст}. \quad (15)$$

Согласно (14), (15)

$$\Delta_2 M'' = -\frac{P_{кр}}{EI} \Delta_2 M,$$

поэтому приближенно

$$\Delta_2 M'' + \frac{P}{EI} \Delta_2 M = \left(-\frac{P_{кр}}{EI} + \frac{P}{EI}\right) \Delta_2 M.$$

Учитывая (13), имеем пропорциональность величин $\Delta_1 M, \Delta_2 M$:

$$\Delta_2 M = \frac{P}{P_{кр} - P} \Delta_1 M. \quad (16)$$

Объединение (7), (11), (12), (16) дает искомую приближенную формулу:

$$M = M^0 + \frac{P}{1 - P/P_{кр}} (\Delta w^0 + a^0 + b^0 x),$$

$$\Delta w^0 = w^0 - w_0^0. \quad (17)$$

Постоянные a^0 , b^0 этой формулы вычисляются из граничных условий, имеют смысл удельных (отнесенных к силе P) опорных реакций на нижнем торце вследствие прогиба w^0 .

Для консольного стержня

$$a^0 = -w_1^0, b^0 = 0. \quad (18)$$

Для шарнирно опертого стержня

$$a^0 = 0, b^0 = 0. \quad (19)$$

В этих двух случаях формула (17) превращается в известные формулы (2), (3).

Когда стержень защемлен внизу и шарнирно оперт вверху, постоянные a^0 , b^0 обеспечивают отсутствие момента и прогиба на верхнем торце. Прогиб вычисляется по формуле Максвелла–Мора. Имеем

$$b^0 = \int_0^l \frac{w^0(x)(l-x)}{EI} dx \bigg/ \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI} dx;$$

$$a^0 = -lb^0. \quad (20)$$

Когда оба торца стержня защемлены, прогиб и угол поворота нижнего торца при закреплённом верхнем торце равны нулю. Постоянные a^0 , b^0 являются решением системы уравнений

$$\int_0^l \frac{1}{EI} dx \cdot a^0 + \int_0^l \frac{x}{EI} dx \cdot b^0 + \int_0^l \frac{w^0(x)}{EI} dx = 0, \quad (21)$$

$$\int_0^l \frac{x}{EI} dx \cdot a^0 + \int_0^l \frac{x^2}{EI} dx \cdot b^0 + \int_0^l \frac{xw^0(x)}{EI} dx = 0.$$

Стержень, нагруженный системой сил

Теперь стержень сжат сосредоточенными силами $P_i = Kp_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, приложенными в сечениях с координатами $x = x_i$, и распределенной силой интенсивности $R(x) = Kr(x)$. $P_0 = Kp_0$ — вертикальная реакция нижней опоры. За K обозначен параметр нагрузки, $K_{кр}$ — критическое значение параметра. Вместо (11) для момента $\Delta_1 M$ имеем:

$$\Delta_1 M = K[f(w^0) + a^0 + b^0 x], \quad (22)$$

$$f(w^0) = p_0(w^0 - w_0^0) - \sum_{i=1}^n p_i(w^0 - w_i^0) \Big|_{x>x_i} -$$

$$-\int_0^x r(y)[w^0(x) - w^0(y)]dy.$$

Здесь под чертой написано условие $x > x_i$, при нарушении которого соответствующее слагаемое принимается равным нулю. Постоянные a^0 , b^0 сохраняют смысл удельных опорных реакций на нижнем торце, вычисляются согласно (18)–(21) с заменой в формулах прогиба w^0 функцией $f(w^0)$.

Формула (17) принимает вид:

$$M = M^0 + \frac{K}{1 - K/K_{кр}} [f(w^0) + a^0 + b^0 x]. \quad (23)$$

Результат (23) выводится так же, как результат (17). Теперь, однако, вместо (5) нужно применить более сложное уравнение

$$M'' + \frac{N}{EI} M - w'R = -q, \quad (24)$$

в котором N — проекция сил по одну сторону от сечения на ось стержня до деформации. Обратим внимание на то, что оба результата (17), (23) относятся к стержню переменного сечения.

Формулы (17), (23) обладают инженерной точностью, когда форма изогнутой оси не слишком далека от формы оси при потере устойчивости для $K = K_{кр}$. Точность формул иллюстрируем примерами изгиба равномерно распределенной поперечной нагрузкой q . Когда изгиб вызван знакопеременной поперечной нагрузкой, следует применять более сложные результаты работы [3].

Консольная стойка. Стойка длиной l нагружена поперечной нагрузкой q и тремя разными системами вертикальных сил (рис. 2). Модуль опорного момента в отсутствие сжатия $M_{оп} = ql^2/2$, прогиб $w_0^0 = 0$. Постоянные $a^0 = -w_1^0$, $b^0 = 0$.

Для нагрузки по рис. 2, а формулы (17) и (23) совпадают, превращаются в известный результат (3). Когда сжимающая сила P составляет 90 % $P_{кр} = \pi^2 EI / 4l^2$, отличие точного и приближенного моментов на опоре составляет 3,5 %.

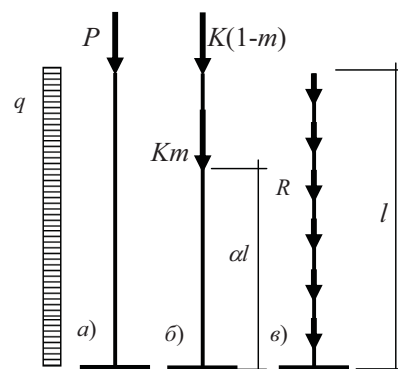


Рис. 2

Параметром K нагрузки по рис. 2, б считается сумма сжимающих сил. В формуле (23) $n = 2$, $p_0 = 1$, $p_1 = m$, $p_2 = 1 - m$, $x_1 = \alpha l$, $x_2 = l$, $r = 0$. Вычисления проделаны для случая $\alpha = 0,5$ (вторая сила посередине). На рис. 3 сопоставлены точное и приближенное решения при $m = 0,5$, критическое значение $K_{кр} = 4,134EI / l^2$ (найдено численно). Принято $K = 0,9K_{кр}$. Видно практическое совпадение кривых.

На рис. 4 показан график погрешности опорного момента в процентах:

$$T = \frac{M_{\text{тоch}}(0) - M(0)}{M_{\text{тоch}}(0)} 100\%.$$

Изменяется параметр m : $m = 0$ — единственная сила на торце, $m = 1$ — единственная сила в пролете. Снова $K = 0,9K_{кр}$. Критические значения $K_{кр}$ для каждого m вычислены путем точного решения задачи устойчивости.

Параметром нагрузки по рис. 2, в считается величина $K = Rl$. Ее критическое значение приведено в [4]: $K_{кр} = R_{кр}l = 7,8373EI / l^2$. В формуле (23) $r = 1/l$, $p_i = 0$. Когда $K = 0,9K_{кр}$, различие точного и приближенного моментов в защемлении составляет 1,8 %.

Отметим, что во всех случаях приближенное решение завышает опорный момент.

Шарнирно опертый стержень. Постоянные $a^0 = b^0 = 0$. Формула (17) превращается в известный результат (2), распространенный на случай изменяющейся вдоль стержня нагрузки. Оценка точности приближенного решения аналогична оценке для консоли.

Статически неопределимый стержень постоянного сечения. Стержень показан на рис. 5, сжат двумя разными системами вертикальных сил. Нижняя опора неподвижна, поэтому в формуле (17) $\Delta w^0 = w^0$. В отсутствие сжатия модуль момента на опоре $M_{\text{оп}} = ql^2 / 8$. Постоянные a^0, b^0 вычисляются согласно (20). Для стержня постоянного сечения получаем

$$b^0 = \int_0^l w^0(x)(l-x)dx \Big/ \frac{l^3}{3} = \frac{1}{240EI}, \quad a^0 = -lb^0.$$

Рис. 6 изображает эпюру $M / M_{\text{оп}}$ для нагружения по схеме 5, а. Критическая сила $P_{кр} = 20,191EI / l^2$, нагрузка $P = 0,9P_{кр}$. Точный и приближенный опорные моменты различаются на 6,7 % (за счет сжимающей силы опорный момент увеличивается в 6,5 раза). Когда $P = 0,8P_{кр}$, различие снижается до 4,8 %.

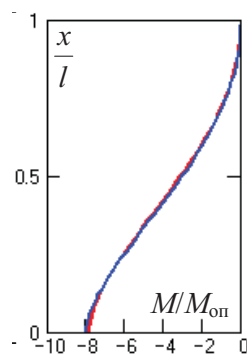


Рис. 3

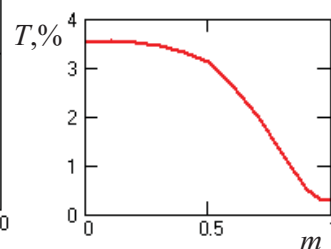


Рис. 4

Для равномерной нагрузки по схеме 5, б параметр нагрузки $K = Rl$, $r = 1/l$. Требуется также величина

$$m(x) = \frac{1}{l} \int_x^l [w^0(x) - w^0(y)] dy.$$

Коэффициент b^0 для стержня постоянного сечения таков

$$b^0 = \int_0^l m(x)(l-x)dx \Big/ \int_0^l (l-x)^2 dx = -\frac{3}{2240EI}.$$

Численное интегрирование неоднородного дифференциального уравнения (24) дает $K_{кр} = R_{кр}l = 52,5EI / l^2$. При таком значении прогиб становится бесконечным.

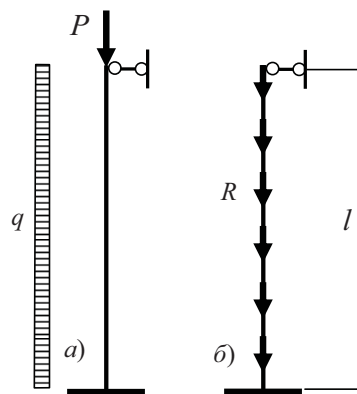


Рис. 5

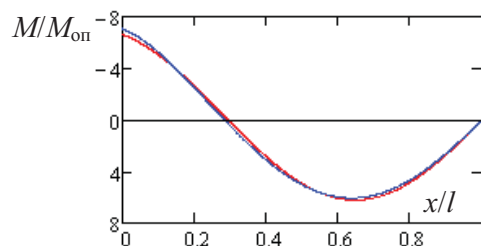


Рис. 6

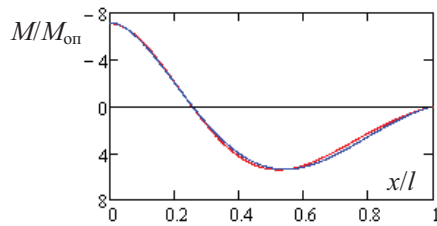


Рис. 7

На рис. 7 сравниваются точная и приближенная эпюры $M / M_{\text{оп}}$. $K = 0,9K_{\text{кр}}$. Видно практическое совпадение кривых.

Статически неопределимый стержень переменного сечения. Стержень нагружен по рис. 5, а. Жесткость стержня задана уравнением $EI = EI_0(1 - \alpha x)^4$,

в котором $\alpha < 1$ — параметр.

В отсутствие сжимающей нагрузки горизонтальная реакция в верхней опоре

$$H^0 = q \int_0^l \frac{(l-x)^3}{2EI} dx \bigg/ \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI} dx,$$

изгибающий момент и прогиб

$$M^0 = H^0 - q \frac{(l-x)^2}{2}, \quad w^0 = \int_0^x (\xi - x) \frac{M^0(\xi)}{EI(\xi)} d\xi.$$

Параметры a^0, b^0 вычисляются согласно (20). Формула (17), в которой $w_0^0 = 0$, определяет изгибающий момент:

$$M = M^0 + \frac{P}{1 - P/P_{\text{кр}}} (w^0 + a^0 + b^0 x).$$

Критическая сила и точное решение задачи получены численно в зависимости от параметра α . На рис. 8 показан график $\alpha = 0,5$.

Точное и приближенное решения сравниваются на рис. 9 при $\alpha = 0,5$ (жесткости внизу и вверху отличаются в 16 раз, $P_{\text{кр}} l^2 / EI_0 = 5,0476$, точный и приближенный опорные моменты отличаются на 7,8 %) и при $\alpha = 0,8$ (жесткости отличаются в 625 раз, $P_{\text{кр}} l^2 / EI_0 = 0,80762$, опорные моменты отличаются на 11 %). Принято $P = 0,8P_{\text{кр}}$. Кривая 0 — сжатие отсутствует, 1 — точное решение, 2 — приближенное решение.

С ростом степени переменности сечения точность приближенного решения снижается, однако остается приемлемой для технических расчетов.

Заключение. Традиционные приближенные формулы (2), (3) для изгибающих моментов в статически неопределимом сжато-изогнутом стержне обобщены на случай статически неопределимых стержней, сжатых системой сосредоточенных

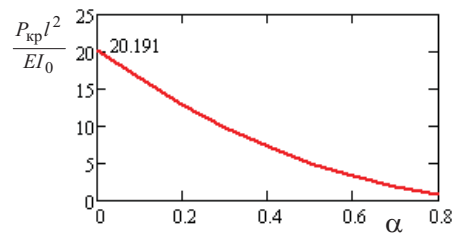


Рис. 8

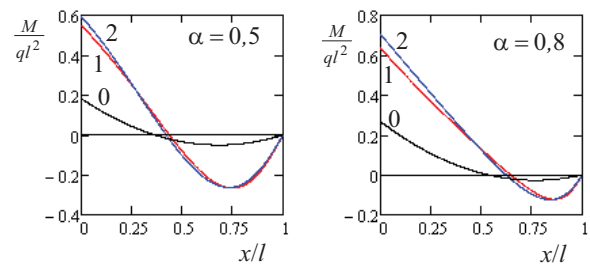


Рис. 9

и распределенных сил. Результатом являются уравнения (17), (23). Они обладают инженерной точностью, полезны для проектных расчетов.

Библиографический список

1. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1965. 364 с.
2. Young T. A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London, 1807.
3. Каган-Розенцвейг Л. М. Метод определения усилий в упругих сжато-изогнутых стержнях переменного сечения. Упрощенное уравнение изгиба (II) // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 1 (54). С. 75–82.
4. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

References

1. Timoshenko S. P. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1965, 364 p.
2. Young T. *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*. London, 1807.
3. Kagan-Rozentsveyg L. M. *Metod opredeleniya usiliy v uprugikh szhato-izognutykh stержnyakh peremennogo secheniya. Uproshchennoe uravnenie izgiba (II)* [Method for internal forces calculation at transverse-longitudinal bending of elastic rods with variable cross section. Simplified bending equation (II)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 1 (54), pp. 75–82.
4. Rzhantsyn A. R. *Ustoychivost' ravnovesiya uprugikh sistem* [Stability of the equilibrium state of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955, 475 p.