

УДК 624.072.2.014.2-415:624.014

© Г. И. Белый, д-р техн. наук, профессор  
(Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия)  
E-mail: office@erkon.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-4-44-53

© G. I. Belyy, Dr. Sci. Tech., Professor  
(Saint Petersburg State University  
of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russia)  
E-mail: office@erkon.ru

## ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

### DEFORMATION CALCULATION AND STABILITY OF ROD ELEMENTS OF STEEL STRUCTURES WITH AN ASYMMETRIC CROSS-SECTION

Для разработки практических рекомендаций по расчету на устойчивость стержневых элементов стальных конструкций с несимметричным сечением, которое образуется в результате неравномерного коррозионного повреждения, усиления или проявления редукции сечения, предложено численно-аналитическое решение деформационной задачи с учетом физической и геометрической (по пространственно-деформированной схеме) нелинейностей. Оно позволяет сократить время расчета на несколько порядков по сравнению с существующими численными решениями. Аналитическое решение деформационной задачи сжато-изогнутых в двух плоскостях упругих стержней построено на основе качественной близости изгибных форм деформирования при центральной сжатии синусоиде с соответствующими формами, полученными недеформационным расчетом — по квадратной параболе. Последняя была заменена синусоидой, что позволило получить общее решение. Проявления физической нелинейности компенсируются дополнительным догружением упругого стержня фиктивной силой с двухосными эксцентриситетами, которая определяется с помощью алгоритма «Сечение» в наиболее нагруженном сечении с учетом его пространственных перемещений. В результате была получена система численно-аналитических уравнений равновесия в безразмерных параметрах, решения которых по мере роста нагрузки позволяют определить коэффициент потери пространственной устойчивости.

*Ключевые слова:* стержневой элемент стальной конструкции, несимметричное сечение, общее нагружение, физическая нелинейность, пространственная устойчивость.

To develop practical recommendations for calculating the stability of rod elements of steel structures with an asymmetric cross-section, which is formed as a result of uneven corrosion damage, strengthening or reduction of the cross-section, there is proposed a numerical and analytical solution of the deformation problem, taking into account physical and geometric (according to the spatially deformed scheme) nonlinearities. It allows reducing the calculation time by several orders of magnitude as compared to the existing numerical solutions. The analytical solution of the deformation problem of elastic rods compressed-bent in two planes is based on the qualitative proximity of bending forms of deformation under central compression, namely, sinusoids with corresponding forms obtained by non-deformational calculation, on a square parabola. The latter was replaced by a sinusoid, which allowed obtaining a general solution. The manifestations of physical nonlinearity are compensated by additional loading of the elastic rod with a fictitious force with biaxial eccentricities, which is assessed using the «section» algorithm in the most loaded section, taking into account its spatial displacements. As a result, there was obtained a system of numerical-analytical equilibrium equations in dimensionless parameters, the solutions of which, as the load increases, allow assessing the coefficient of loss of spatial stability.

*Keywords:* steel structure rod element, asymmetric cross-section, general loading, physical nonlinearity, spatial stability.

В практике расчета стальных конструкций часто встречаются случаи, когда сечения их стержневых элементов в результате неравномерного коррозионного повреждения, усиления или проявления редукиции, нарушающей симметрию, необходимо принимать несимметричными. Расчет на общую устойчивость таких элементов по СП 16.13330.2017<sup>1</sup> не представляется возможным, поскольку она не может быть разделена на устойчивость по изгибной (в плоскости симметрии) и изгибно-крутильной (из этой плоскости) формам. В силу несимметрии сечения потеря устойчивости всегда будет происходить по пространственно-деформированной схеме.

В настоящей статье предлагается аналитическое решение деформационной задачи неограниченно упругого стержневого элемента с несимметричным сечением по «нормативным»<sup>1</sup> расчетным моделям, которое в сочетании с алгоритмом «Сечение» прямым или «обратным» методом расчета [1, 2] может быть использовано для учета физической нелинейности и редукиции сечения.

Выделение стержневых элементов из конструкции по СП 16.13330.2017<sup>1</sup> в предположении сохранения моносимметрии сечения выполняется с помощью расчетных длин:

- в изначальной плоскости симметрии — по  $l_{ef,x}$  (рис. 1, а) с загрузением стержня продольной силой  $N^0$  и равными опорными моментами с максимальным значением  $M_{x,max}^0$  ( $e_{y,v}^0 = M_{x,max}^0 / N^0$ ), которые вытекают из статического расчета конструкции при наихудшем сочетании нагрузок (усилий);

- из этой плоскости — по  $l_{ef,y}$  с той же схемой загрузки, но с другим значением опорных моментов: наибольшим в средней трети длины  $M_{x,ср}^0$  ( $e_{y,u}^0 = M_{x,ср}^0 / N^0$ ). При этом необходимо учитывать также случайный  $e_{x,сл}^0 = l / 750 + i_{y_0} / 20$  или фактический  $e_{x_0}^0 = M_y^0 / N^0$  эксцентриситеты продольной силы в плоскости выделения элемента (рис. 2, а).

Учитывая изложенное, устойчивость выделенных из конструкции по  $l_{ef,x}$  и  $l_{ef,y}$  моделей стержней с различным загрузением, имеющих по всей длине ослабление сечения  $A_0$  с координатами центра тяжести  $-x_0, -y_0$ , нарушающего его симметрию (рис. 1, б), необходимо исследовать отдельно.

Для первой модели (см. рис. 1, а) пространственную форму деформирования следует определять с учетом промежуточных локальных подкреплений стержня из плоскости загрузки (определяющих  $l_{ef,y}$ ), что является весьма трудоемким мероприятием. Поэтому для реализации

<sup>1</sup> СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. М., 2017. 139 с.

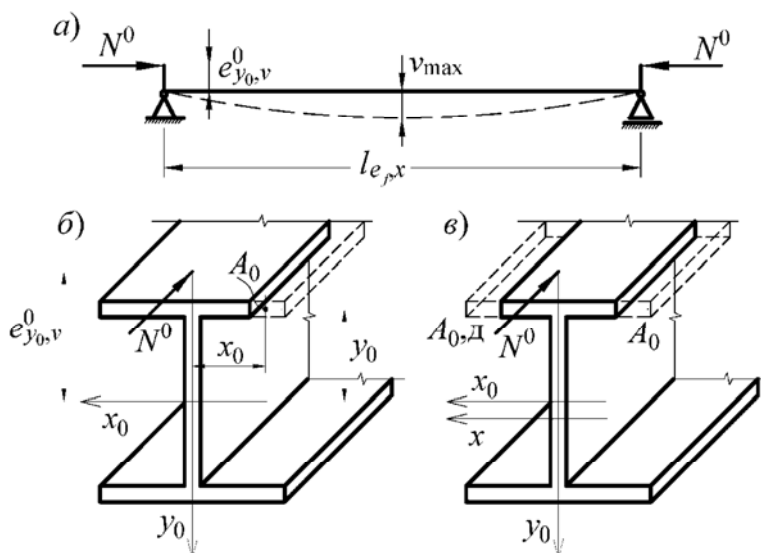


Рис. 1. Расчетная модель стержня по  $l_{ef,x}$ : а — схема загрузки; б — несимметричное сечение со схемой загрузки; в — то же для принятого симметричного сечения

изгибной формы потери устойчивости в исходное сечение (см. рис. 1, б) введем дополнительное ослабление  $A_{0,d} = A_0$ , приводящее к симметрии сечения относительно оси  $y$  (рис. 1, в).

Таким образом, проверку устойчивости стержневых элементов, выделенных по  $l_{ef,x}$  с несимметричным сечением в плоскости нагружения, можно привести к «нормативной»<sup>1</sup>. При этом вводимое дополнительное ослабление сечения компенсирует влияние на устойчивость изгибно-крутильных перемещений, которые могут проявляться между промежуточными поперечными креплениями.

### 1. Решение деформационной задачи по пространственно-деформированной схеме упругого стержня с несимметричным сечением

Исследование пространственных деформаций и устойчивости стержневых элементов с несимметричным сечением по второй расчетной модели (см. рис. 2, а) будем проводить с помощью технической теории расчета тонкостенных

стержней В. З. Власова [3] и деформационной теории упругих стержней Л. Н. Воробьева [4], Б. М. Брауде [5], Г. В. Воронцова [6], обобщенной Е. А. Бейлиным [7].

Для шарнирно закрепленного в двух главных плоскостях стержня при отсутствии угла закручивания концевых свободно деформируемых сечений (см. рис. 2, а) система дифференциальных уравнений равновесия [7] после предварительного интегрирования первых двух примет вид:

$$\left. \begin{aligned} EJ_x v'' + N^0 v - N^0 (e_x^0 + a_x) \theta &= -N^0 e_y^0; \\ EJ_y u'' + N^0 u + N^0 (e_y^0 + a_y) \theta &= -N^0 e_x^0; \\ EJ_w \theta^{IV} + GJ_k \theta'' + N^0 (e_y^0 + a_y) u'' - N^0 (e_x^0 + a_x) v'' + \\ &+ N^0 [i_A^2 + 2\beta_y e_y^0 - 2\beta_x e_x^0] \theta'' = 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

где  $u, v$  — перемещения точек оси стержня в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно (рис. 2, б);  $\theta$  — угол закручивания сечений;  $J_x, J_y, J_w$  — осевые и секторальный моменты инерции сече-

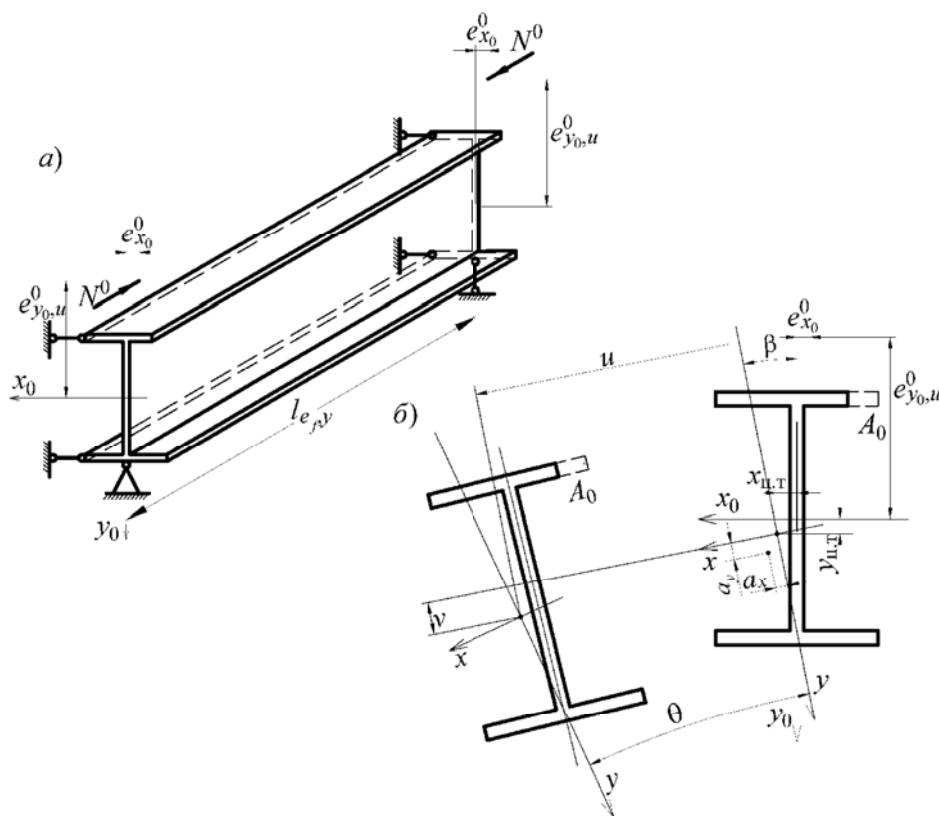


Рис. 2. Расчетная модель стержня по  $l_{ef,y}$ : а — схема нагружения; б — схема деформирования

ния;  $J_k$  — момент инерции чистого кручения;  $i_A^2 = i_p^2 + a_x^2 + a_y^2$ ;  $i_p$  — полярный радиус инерции;

$$\beta_y = (2J_y)^{-1} \int_A (x^2 + y^2) y dA - a_y;$$

$$\beta_x = (2J_x)^{-1} \int_0^A (x^2 + y^2) x dA - a_x.$$

Заметим, что уравнения (1) составлены относительно главных осей несимметричного сечения  $x$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести с координатами  $x_{ц.т.}$ ,  $y_{ц.т.}$  относительно изначально бисимметрического сечения с осями  $x_0$ ,  $y_0$ , которые к тому же получили поворот на угол  $\beta$  (см. рис. 2, б). При этом центр изгиба получает координаты  $a_x$ ,  $a_y$ . Учитывая изложенное, эксцентриситеты продольной силы  $e_x^0$ ,  $e_y^0$ , представленные в системе уравнений (1), следует определять:

$$\left. \begin{aligned} e_y^0 &= (e_{y_0,u}^0 + y_{ц.т.}) \cos \beta + (e_{x_0}^0 + x_{ц.т.}) \sin \beta; \\ e_x^0 &= (e_{y_0,u}^0 + y_{ц.т.}) \sin \beta + (e_{x_0}^0 + x_{ц.т.}) \cos \beta, \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $e_{y_0,u}^0$ ,  $e_{x_0}^0$  — эксцентриситеты, устанавливаемые при выделении стержневого элемента из конструкции по  $l_{ef,y}$  как для симметричного сечения.

Обращаясь к общей системе уравнений (1), можно увидеть, что при частных случаях загрузки, как это было сделано в ряде работ, она не разделяется и постановка бифуркационных задач устойчивости становится невозможной.

Принимая во внимание изложенное, на первом этапе рассмотрим решение поставленной деформационной задачи при центральном сжатии ( $e_x^0 = e_y^0 = 0$ ), которой должны соответствовать следующие кинематические и силовые граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \bar{z} = 0 \text{ и } \bar{z} = 1 \text{ (} \bar{z} = z/l \text{): } v = u = \theta = 0; \\ M_x = M_y = B_w = 0; (v'' = u'' = \theta'' = 0); \\ \text{при } \bar{z} = 0,5: v' = u' = \theta' = 0; \\ Q_x = Q_y = M_w = 0; (v''' = u''' = \theta''' = 0). \end{aligned} \right\} (3)$$

Анализируя последние, нетрудно заметить, что этим условиям отвечают следующие функции:

$$v_d = V_d \sin \pi z; u_d = U_d \sin \pi z, \theta_d = \Theta_d \sin \pi z, (4)$$

где  $V_d$ ,  $U_d$ ,  $\Theta_d$  — некоторые неизвестные амплитуды перемещений.

На втором этапе рассмотрим решение недеформационных задач при загрузении стержня только опорными моментами  $M_x^0 = N^0 e_y^0$

и  $M_y^0 = N^0 e_x^0$ , вызывающими соответствующие перемещения

$$v_H = V_H 4(\bar{z} - \bar{z}^2), u_H = U_H 4(\bar{z} - \bar{z}^2), (5)$$

где  $V_H = \frac{N^0 l^2}{8EJ_x} e_y^0$ ;  $U_H = \frac{N^0 l^2}{8EJ_y} e_x^0$  ( $l_{ef,y}$  принимается равным  $l$ ).

Видно, что силовые граничные условия этих задач при  $\bar{z} = 0$  и  $\bar{z} = 1$ :  $M_x^0 \neq 0$ ,  $M_y^0 \neq 0$  не соответствуют принятым в решении деформационной задачи при центральном сжатии (3). При этом форма перемещений (5) представляет собой квадратную параболу, которая является качественно близкой к синусоиде, принятой в функциях пространственных перемещений (4). Это позволяет использовать последнюю в решении (5) и избавиться от несоблюдения указанных силовых условий, тогда

$$v_H = V_H \sin \pi z; u_H = U_H \sin \pi z. (6)$$

Следует заметить, что с помощью этого приема для стержней с моносимметричным сечением была получена широко известная приближенная формула деформационного расчета в плоскости симметрии  $v(\bar{z}) = v_H(\bar{z}) (1 - \frac{N^0}{N_{cr,x}})^{-1}$  ( $N_{cr,x}$  — критическая сила при изгибе в плоскости симметрии), которая затем в работе [8] была обобщена на решение деформационной задачи по изгибно-крутильной форме

$$v(\bar{z}) = v_H(\bar{z}) \eta; \theta(\bar{z}) = \theta_H(\bar{z}) \eta,$$

где

$$\eta = \left[ \left( 1 - \frac{N^0}{N_{cr1}} \right) \left( 1 - \frac{N^0}{N_{cr2}} \right) \right]^{-1}. (7)$$

Критические силы  $N_{cr1}$  и  $N_{cr2}$  в (7) вытекают из решения соответствующей бифуркационной задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме:

- при относительно малых значениях эксцентриситетов  $e_y^0$  первая из них преимущественно характеризует изгибную форму, а вторая — крутильную;

- при больших значениях  $e_y^0$  первая соответствует заданному направлению силы, а вторая — обратному.

Приведенные приближенные аналитические решения, как известно, обладают достаточно высокой точностью для принятых расчетных моделей стержней.

Возвращаясь к решению поставленной задачи, подставим частные решения (4) и (6) в систему уравнений (1), в результате чего получим:

$$\left. \begin{aligned}
 & -V_{\text{д}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} + V_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_x} \sin \pi \bar{z} - \\
 & -\Theta_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_x} (e_x^0 + a_x) \sin \pi \bar{z} = -V_{\text{н}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z}; \\
 & -U_{\text{д}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} + U_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_y} \sin \pi \bar{z} + \\
 & +\Theta_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_y} (e_y^0 + a_y) \sin \pi \bar{z} = -U_{\text{н}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z}; \\
 & \Theta_{\text{д}} \frac{\pi^4}{l^4} \sin \pi \bar{z} + \Theta_{\text{д}} \frac{\kappa^2 \pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} - \\
 & -U_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_y} \left( \frac{J_y}{J_w} \right) (e_y^0 + a_y) \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} + \\
 & +V_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_y} \left( \frac{J_y}{J_w} \right) (e_x^0 + a_x) \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} - \\
 & -\Theta_{\text{д}} \frac{N^0}{EJ_y} \left( \frac{J_y}{J_w} \right) [i_A^2 + 2\beta_y e_y^0 - 2\beta_x e_x^0] \frac{\pi^2}{l^2} \sin \pi \bar{z} = 0,
 \end{aligned} \right\} (8)$$

где  $\kappa = \sqrt{GJ_{\text{к}}/EJ_w}$  — изгибно-крутильная характеристика.

Для определения неизвестных амплитуд перемещений  $V_{\text{д}}$ ,  $U_{\text{д}}$  и  $\Theta_{\text{д}}$  приведем систему уравнений (8) к безразмерным параметрам, соответствующим СП 16.13330.2017, тогда

$$\left. \begin{aligned}
 & m_{x,\text{д}} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right) + \Theta_{\text{д}} \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} (m_y^0 + m_{ay}) \frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{8} m_x^0; \\
 & m_{y,\text{д}} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) - \\
 & -\Theta_{\text{д}} \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} (m_x^0 + m_{ax}) \frac{\rho_x}{\rho_y} = \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{8} m_y^0; \\
 & m_{x,\text{д}} \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \frac{J_y \rho_x^2}{J_w} (m_y^0 + m_{ay}) \frac{\rho_y}{\rho_x} - \\
 & -m_{y,\text{д}} \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \frac{J_y \rho_x^2}{J_w} (m_x^0 + m_{ax}) \frac{\rho_y}{\rho_x} + \\
 & +\Theta_{\text{д}} \left[ \begin{aligned}
 & 1 + \frac{\kappa^2 l^2}{\pi^2} - \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \frac{J_y \rho_x^2}{J_w} \times \\
 & \times \left( \frac{i_A^2 + 2\beta_y m_x^0 \rho_x - 2\beta_x m_y^0 \rho_y}{\rho_x^2} \right) \right] = 0,
 \end{aligned} \right\} (9)
 \end{aligned}$$

где  $\phi = \frac{N^0}{R_y A}$  — коэффициент продольной силы;

$\bar{\lambda}_y = \frac{l e_{f,y}}{i_y} \sqrt{\frac{R_y}{E}}$ ,  $\bar{\lambda}_x = \bar{\lambda}_y \frac{i_y}{i_x}$  — условные гибкости стержня;  $m_x^0 = e_y^0 / \rho_x$ ,  $m_y^0 = e_x^0 / \rho_y$  — относительные эксцентриситеты;  $m_{ax} = a_y / \rho_x$ ,  $m_{ay} = a_x / \rho_y$  — относительные координаты центра изгиба;  $m_{x,\text{д}} = V_{\text{д}} / \rho_x$ ,  $m_{y,\text{д}} = U_{\text{д}} / \rho_y$  — неизвестные относительные деформационные перемещения в направлении осей  $y$  и  $x$  соответственно;  $\rho_x$  и  $\rho_y$  — ядровые расстояния.

Определив пространственные перемещения  $m_{x,\text{д}}$ ,  $m_{y,\text{д}}$ ,  $\Theta_{\text{д}}$  (решение системы уравнений (9)), представим напряженное состояние в наиболее нагруженном сечении  $\bar{z} = 0,5$  в виде

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = \phi \left[ 1 + m_x^0 \bar{y} K_{d,x} + m_y^0 \bar{x} K_{d,y} \right] + \Theta_{\text{д}} \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \frac{\bar{\omega}_*}{i_y^2} \bar{\omega}, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 & K_{d,x} = 1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{8} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left[ 1 - \Theta_{\text{д}} \frac{8}{\pi^2} \frac{\rho_y}{\rho_x} \frac{(m_y^0 + m_{ay})}{m_x^0} \right]; \\
 & K_{d,y} = 1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{8} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left[ 1 + \Theta_{\text{д}} \frac{8}{\pi^2} \frac{\rho_x}{\rho_y} \frac{(m_x^0 + m_{ax})}{m_y^0} \right],
 \end{aligned} \right\} (11)$$

где  $K_{d,x}$  и  $K_{d,y}$  — коэффициенты, учитывающие влияние пространственных перемещений  $u$ ,  $v$  и  $\theta$  на изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  соответственно;  $\bar{x} = x / x_*$ ,  $\bar{y} = y / y_*$ ,  $\bar{\omega} = \omega / \omega_*$ ;  $x_*$ ,  $y_*$ ,  $\omega_*$  — декартовы и секторальная координаты наиболее напряженного волокна.

Угол закручивания среднего сечения в (10) и (11) определяется

$$\Theta_{\text{д}} = \frac{\frac{\pi^2}{8} \frac{\rho_y}{\rho_x} \left[ K_1 m_y^0 (m_x^0 + m_{ax})^{-1} - K_2 m_x^0 (m_x^0 + m_{ay})^{-1} (i_y / i_x)^2 \right]}{K_4 - \left[ K_3 \frac{\pi^2}{\phi \bar{\lambda}_y^2} + K_1 + K_2 \left( \frac{i_y}{i_x} \frac{\rho_x}{\rho_y} \right)^2 \right]}, \quad (12)$$

где

$$K_1 = (m_x^0 + m_{ax})^2 \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right)^{-1};$$

$$K_2 = (m_y^0 + m_{ay})^2 \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1};$$

$$K_3 = (i_A^2 + 2\beta_y m_x^0 \rho_x - 2\beta_x m_y^0 \rho_y) \rho_x^{-2};$$

$$K_4 = \left( 1 + \frac{\kappa^2 l^2}{\pi^2} \right) \frac{\pi^4}{\phi^2 \bar{\lambda}_y^4} \frac{J_w}{J_y \rho_x^2}.$$

Последний член в (10) представляет бимоментные напряжения, вызванные деформационным кручением:

$$\bar{\sigma}_\omega(\bar{\omega}) = \frac{\sigma(\bar{\omega})}{R_y} = \Theta_d \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \frac{\omega_*}{i_y^2} \bar{\omega}, \quad (13)$$

которые, как показывают примеры расчета упругих стержней, незначительно влияют на общее напряженное состояние. Учитывая к тому же, что развитие пластических деформаций или редукция сечения определяются в наиболее нагруженной части стержня и распространяются по всей длине (что несколько занижает общую устойчивость), влиянием  $\bar{\sigma}_\omega$  вполне можно пренебречь.

Аналитический метод решения деформационных задач [9], основанный на использовании линейной комбинации частных решений задач недеформационного расчета и бифуркационных задач устойчивости, в сочетании с алгоритмом «Сечение» позволил исследовать пространственную устойчивость различных типов стержневых элементов конструкции при общем случае загрузки (см., например, [10–12]). Для уточнения решения (11) и (12) воспользуемся [9], в соответствии с которым общее решение системы уравнений (1) представим в виде комбинации частных решений (4) и (5).

$$v = V_d \sin \pi z + V_n 4(\bar{z} - \bar{z}^2); u = U_d \sin \pi z + U_n 4(\bar{z} - \bar{z}^2);$$

$$\theta_d = \Theta_d \sin \pi \bar{z}. \quad (14)$$

Тогда, следуя [9] с выполнением процедуры Бубнова — Галёркина, получим:

$$\left. \begin{aligned} K_{d,x} &= 1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{8} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ 1 + 0,032 \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} - \Theta_d \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{\rho_y}{\rho_x} \right) \frac{(m_y^0 + m_{ay})}{m_x^0} \right]; \\ K_{d,y} &= 1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{8} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ 1 + 0,032 \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} + \Theta_d \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{\rho_x}{\rho_y} \right) \frac{(m_x^0 + m_{ax})}{m_y^0} \right]; \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\Theta_d = \frac{\left[ 1,032 \frac{\pi^2}{8} \frac{\rho_y}{\rho_x} \left[ K_1 m_y^0 (m_x^0 + m_{ax})^{-1} - K_2 m_x^0 (m_y^0 + m_{ay})^{-1} \left( \frac{i_y}{i_x} \right)^2 \right] \right]}{K_4 - \left[ K_3 \frac{\pi^2}{\phi \bar{\lambda}_y^2} + K_1 + K_2 \left( \frac{i_y}{i_x} \frac{\rho_x}{\rho_y} \right)^2 \right]}.$$

Сопоставляя (15) с (11) и (12), можно увидеть (см. выделенные пунктирной рамкой члены в (15)), что изгибные деформационные составляющие  $m_{x,d}$  и  $m_{y,d}$  коэффициентов  $K_{d,x}$  и  $K_{d,y}$  в (15) увеличиваются на  $0,032 \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2}$  и  $0,032 \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2}$  соответственно, а угол закручивания сечения  $\Theta_d$  — на 3,2 %. В рамках практических расчетов стержневых элементов конструкций гибкостью  $\bar{\lambda}_y \leq 5$  отмеченные уточнения весьма незначительные (1...3 % при  $\lambda_y > 5$ ) и ими можно пренебречь.

Анализируя полученные в (11) выражения для коэффициентов  $K_{d,x}$  и  $K_{d,y}$ , можно констатировать также, что деформационная составляющая момента в плоскости большой жесткости ( $J_x > J_y$ ), вызванная углом закручивания сечения  $\Theta_d \frac{\rho_y}{\rho_x} (m_y^0 + m_{ay}) / m_x^0$  (см.  $K_{d,x}$ ), оказывает относительно малое разгружающее действие, а аналогичная составляющая в другой плоскости (см.  $K_{d,y}$  в (11))  $\Theta_d \frac{\rho_x}{\rho_y} (m_x^0 + m_{ax}) / m_y^0$  при  $\rho_x > \rho_y$  и  $m_x^0 > m_y^0$  — весьма существенное догружающее.

Учитывая изложенное, влиянием первой из них на  $m_x$  при  $J_x \geq 1,5 J_y$  можно пренебречь, как это было рекомендовано в [1, 2], что можно отнести к запасу устойчивости, тогда

$$K_{d,x} = 1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{8} \left( 1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Полученное аналитическое решение задачи по пространственно-деформированной схеме стержня с несимметричным сечением при заданных значениях  $m_x^0$  и  $m_y^0$  позволяет определить коэффициент потери устойчивости  $\phi$  по фибровой текучести из решения следующего уравнения:

$$\bar{\sigma}_{\max} = \phi \left[ 1 + m_x^0 K_{d,x} + m_y^0 K_{d,y} \right] = 1. \quad (17)$$

## 2. Пространственные деформации и устойчивость стальных стержней с несимметричным сечением за пределом упругости

Следуя методу решения [2], упруго-пластическую модель стержня заменим упругой

с компенсирующим физическую нелинейность догружением фиктивными усилиями, тогда напряженное состояние в наиболее нагруженном сечении (10) при  $\bar{\sigma}_\omega = 0$  примет вид:

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi \left[ 1 + m_x^0 \bar{y} K_{d,x} + m_y^0 \bar{x} K_{d,y} \right] + \varphi_\Phi \left[ 1 + m_{x\Phi}^0 \bar{y} K_{d,x} + m_{y\Phi}^0 \bar{x} K_{d,y} \right], \quad (18)$$

где  $\varphi_\Phi = N_\Phi / R_y A$  — коэффициент продольной фиктивной силы, действующей с двухосными концевыми относительными эксцентриситетами  $m_{x\Phi}^0, m_{y\Phi}^0$ ;  $K_{d,x}$  и  $K_{d,y}$  — коэффициенты, учитывающие влияние пространственных деформаций  $u, v$  и  $\theta$  на изгибающие моменты (11).

При общем параметре загрузки  $\varphi^* = \varphi + \varphi_\Phi$  напряженное состояние в наиболее нагруженном сечении упругого стержня (18) приобретает вид

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi^* \left[ 1 + m_x^* \bar{y} + m_y^* \bar{x} \right], \quad (19)$$

где

$$m_x^* = K_{d,x} (\varphi m_x^0 + \varphi_\Phi m_{x\Phi}^0) / \varphi^*;$$

$$m_y^* = K_{d,y} (\varphi m_y^0 + \varphi_\Phi m_{y\Phi}^0) / \varphi^*.$$

Для определения  $\varphi^*, m_x^*, m_y^*$  как внутренних усилий и сопутствующих им  $\varphi_\Phi, m_{x\Phi}^0, m_{y\Phi}^0$  (при заданных значениях  $\varphi, m_x^0, m_y^0$ ) воспользуемся алгоритмом «Сечение», в соответствии с которым разобьем несимметричное сечение на  $n$  достаточно малых дискретных площадок  $\Delta A_k$  с координатами центра тяжести  $x_k, y_k$  (рис. 3, а). Решение будем выводить в безразмерных параметрах, для

чего используем унифицированную диаграмму работы стали  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  (рис. 3, б). Гипотеза плоских сечений в этом случае примет вид:

$$\bar{\varepsilon}_k = \bar{\varepsilon}_o - \bar{v}'' \cdot \bar{y}_k - \bar{u}'' \cdot \bar{x}_k, \quad (20)$$

где  $\bar{\varepsilon}_o = \varepsilon_o E / R_y$ ;  $\bar{v}'' = v'' \rho_x E / R_y$ ;  $\bar{u}'' = u'' \rho_y E / R_y$ ;  $\bar{x}_k = x_k / \rho_y$ ;  $\bar{y}_k = y_k / \rho_x$ ;  $\varepsilon_o$  — относительная деформация оси стержня;  $v''$  и  $u''$  — кривизны при изгибе стержня относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Используя (20), представим уравнения равновесия в наиболее нагруженном сечении с предварительной заменой  $\bar{\varepsilon}_o, \bar{v}'', \bar{u}''$  на соответствующие им внутренние усилия [2]:

$$\bar{\varepsilon}_o = \varphi^* ; \bar{v}'' = -\varphi^* m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} ; \bar{u}'' = -\varphi^* m_y^* \frac{\rho_y}{x_*}, \quad (21)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^* \left[ \bar{A}_{ef} - m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c - m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c \right]; \\ \varphi m_x^0 \left[ K_{d,x} + \frac{\varphi_\Phi m_{x\Phi}^0}{\varphi m_x^0} (K_{d,x} - 1) \right] &= \\ = \varphi^* \left[ -\bar{y}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} i_{x,ef}^2 - m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} i_{xy,ef}^2 \right]; \\ \varphi m_y^0 \left[ K_{d,y} + \frac{\varphi_\Phi m_{y\Phi}^0}{\varphi m_y^0} (K_{d,y} - 1) \right] &= \\ = \varphi^* \left[ -\bar{x}_c - m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} i_{xy,ef}^2 + m_y^* \frac{\rho_y}{x_*} i_{y,ef}^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

При этом фиктивные усилия могут быть получены:

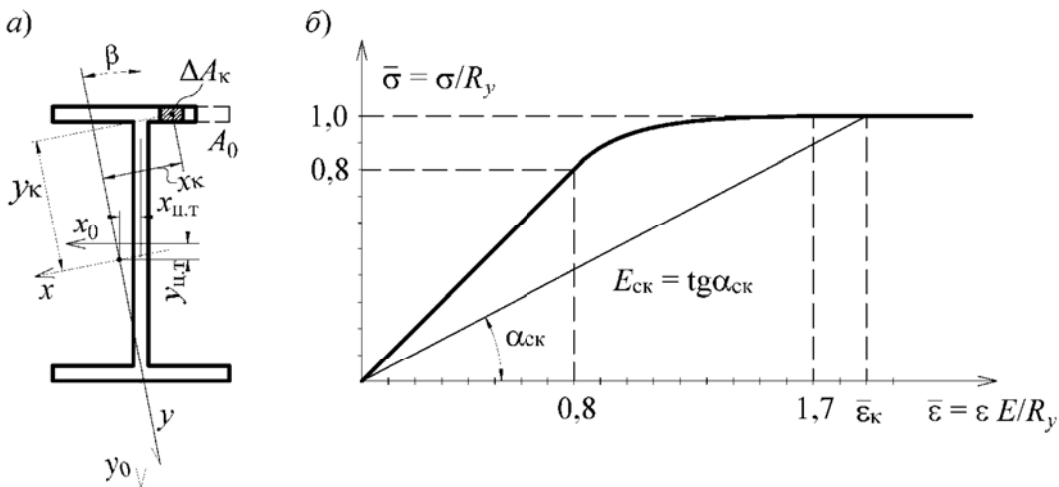


Рис. 3. Физическая нелинейность стержня в сечении: а — разбиение сечения на дискретные площадки  $\Delta A_k$ ; б — унифицированная диаграмма  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\Phi}^0 &= \varphi^* \left[ (1 - \bar{A}_{ef}) + m_x^* \frac{\rho_x}{y^*} \bar{y}_c + m_y^* \frac{\rho_y}{x^*} \bar{x}_c \right]; \\ m_{x,\Phi}^0 &= \frac{\varphi^*}{\varphi_{\Phi}} \left[ \bar{y}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y^*} \bar{i}_{x,ocл}^2 + m_y^* \frac{\rho_y}{x^*} \bar{i}_{xy,ef}^2 \right]; \\ m_{y,\Phi}^0 &= \frac{\varphi^*}{\varphi_{\Phi}} \left[ \bar{x}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y^*} \bar{i}_{xy,ef}^2 + m_y^* \frac{\rho_y}{x^*} \bar{i}_{y,ocл}^2 \right]. \end{aligned} \right\} (23)$$

В (22) и (23) обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{ef} &= \sum_{\kappa=1}^n \bar{E}_{c\kappa} \Delta \bar{A}_{\kappa}; \quad \bar{y}_c = \sum_{\kappa=1}^n \bar{E}_{c\kappa} \tilde{y}_{\kappa} \Delta \bar{A}_{\kappa}; \\ \bar{x}_c &= \sum_{\kappa=1}^n E_{c\kappa} \tilde{x}_{\kappa} \Delta \bar{A}_{\kappa}; \quad \bar{i}_{x,ef}^2 = \sum_{\kappa=1}^n E_{c\kappa} \tilde{y}_{\kappa}^2 \Delta \bar{A}_{\kappa}; \\ \bar{i}_{xy,ef}^2 &= \sum_{\kappa=1}^n E_{c\kappa} \tilde{x}_{\kappa} \tilde{y}_{\kappa} \Delta \bar{A}_{\kappa}; \quad \bar{i}_{y,ef}^2 = \sum_{\kappa=1}^n E_{c\kappa} \tilde{x}_{\kappa}^2 \Delta \bar{A}_{\kappa}; \\ \bar{i}_{x,ocл}^2 &= \frac{J_x}{\rho_x^2 A} - \bar{i}_{x,ef}^2; \quad \bar{i}_{y,ocл}^2 = \frac{J_y}{\rho_y^2 A} - \bar{i}_{y,ef}^2, \end{aligned} \right\} (24)$$

$\Delta A_{\kappa} = \Delta A_{\kappa} / A$ ;  $E_{c\kappa} = \text{tg } \alpha_{c\kappa}$  — относительный секущий модуль, показанный на рис. 3, б.

Левые части уравнений (22) представляют собой усилия, полученные расчетом по пространственно-деформированной схеме и являются результатом действия заданной силы  $N^0$  с параметрами  $\varphi$ ,  $m_x^0$ ,  $m_y^0$ . При этом влияние развития пластических деформаций на пространственные перемещения учитывается членами  $(\varphi_{\Phi} m_{x\Phi}^0 / \varphi m_x^0)(K_{d,x} - 1)$  и  $(\varphi_{\Phi} m_{y\Phi}^0 / \varphi m_y^0)(K_{d,y} - 1)$  во втором и третьем уравнениях (22) соответственно. Правые части (22) являются внутренними усилиями, отражающими физическую нелинейность.

Таким образом, полученное аналитическое решение задачи по пространственно-деформированной схеме стержня с учетом компенсирующего физическую нелинейность дополнительного догружения фиктивными усилиями (18) в сочетании с алгоритмом «Сечение» позволило получить общую систему нелинейных уравнений (22).

По заданным значениям продольной силы с параметром  $\varphi$  при  $m_x^0 = \text{const}$  и  $m_y^0 = \text{const}$  решение системы уравнений (22), учитывающих физическую и геометрическую нелинейность, по определению  $\varphi^*$ ,  $m_x^*$ ,  $m_y^*$  и соответствующих им  $\varphi_{\Phi}$ ,  $m_{x\Phi}^0$ ,  $m_{y\Phi}^0$  по (23) следует искать с использованием итерационного процесса (см., например, [13, 14]) — по его сходимости. При этом можно

также установить влияние пространственных деформаций на усилия

$$\left. \begin{aligned} m_x &= m_x^0 \left[ K_{d,x} + \frac{\varphi_{\Phi} m_{x\Phi}^0}{\varphi m_x^0} (K_{d,x} - 1) \right]; \\ m_y &= m_y^0 \left[ K_{d,y} + \frac{\varphi_{\Phi} m_{y\Phi}^0}{\varphi m_y^0} (K_{d,y} - 1) \right]. \end{aligned} \right\} (25)$$

С ростом  $\varphi$  (нагрузки) сходимость процесса ухудшается и на определенном этапе он становится расходящимся, что соответствует нарушению устойчивости процесса пространственного деформирования. Таким образом, с требуемой точностью можно определить параметр  $\varphi$ , при котором процесс еще сходил, и принять его за коэффициент потери пространственной устойчивости  $\varphi_{e_{xy}}$ . При этом достаточно малое его приращение приводит к расходимости процесса.

#### Выводы

1. Приближенное аналитическое решение деформационной задачи упругих сжатых изогнутых в двух плоскостях стержней с несимметричным сечением по пространственно-деформированной схеме обладает достаточно высокой точностью. В его основе заложена качественная близость изгибных форм деформирования при центральной сжатии синусоиде с соответствующими формами, полученными недеформационным расчетом — по квадратной параболе. Последняя была заменена синусоидой, что позволило получить общее решение.

Следует заметить, что с помощью такого приема была получена в свое время широко известная приближенная формула деформационного расчета по изгибной форме, которая затем в [8] была обобщена на изгибно-крутильные деформации.

2. Достоверность полученного решения была проверена аналитическим методом [9], основанном на использовании комбинации упомянутых частных решений (14). Сопоставление результатов показало, что использование [9] приводит к незначительному увеличению пространственных деформаций (0,2...3,2 %).

3. Физическая нелинейность компенсируется дополнительным догружением фиктивными усилиями, которые определяются с помощью алгоритма «Сечение» в наиболее нагруженном сечении пространственно деформируемого стержня.



4. Предложенное аналитическое решение в сочетании с алгоритмом «Сечение» позволило получить систему численно-аналитических уравнений равновесия с учетом физической и геометрической (по пространственной схеме) нелинейностей, решения которых, по мере роста нагрузки, позволяют определять коэффициенты потери пространственной устойчивости  $\varphi_{e_{xy}}$  сжато-изогнутых стержней с различными типами несимметричности.

Получив необходимый для практического применения объем результатов расчета, проверку устойчивости можно свести к традиционному виду

$$\frac{N}{\varphi_{e_{xy}} AR_y \gamma_f} \leq 1. \quad (26)$$

#### Библиографический список

1. Белый Г. И. Развитие методов расчета стержневых элементов стальных конструкций при многопараметрическом нагружении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 3 (80). С. 43–54.
2. Белый Г. И. «Обратный» метод расчета усиливаемых под нагрузкой стержневых элементов стальных конструкций путем увеличения сечений // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 6 (83). С. 46–55.
3. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 565 с.
4. Воробьев В. З. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля // Труды Новочеркасского политехн. ин-та. 1958. Т. 69/63. С. 3–48.
5. Броуде Б. М. К теории тонкостенных стержней открытого профиля // Строительная механика и расчет сооружений. 1960. № 5. С. 6–11.
6. Воронцов Г. В. Малые пространственные колебания, устойчивость и устойчивая прочность тонкостенных стержней открытого профиля // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1965. № 1. С. 44–49.
7. Бейлин Е. А. Общие уравнения деформационного расчета и устойчивости тонкостенных стержней // Строит. механика и расчет сооружений. 1969. № 5. С. 35–41.
8. Бейлин Е. А., Белый Г. И. О расчете упругих систем, подверженных одновременному действию активных и параметрических нагрузок // Строительная механика сооружений: сб. науч. тр. ЛИСИ. 1980. № 32. С. 30–34.
9. Белый Г. И. О расчете упругих стержней по деформированной схеме при действии активных и параметрических нагрузок // Механика стержневых си-

стем и сплошных сред: сб. науч. тр. ЛИСИ. 1980. № 32. С. 41–48.

10. Родиков Н. Н. Устойчивость сжатых с двухосными эксцентриситетами стержневых элементов конструкций из открытых профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1987. 22 с.

11. Пяткин П. А. Прочность и пространственная устойчивость усиленных под нагрузкой стержневых элементов конструкций открытого профиля: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 24 с.

12. Кузнецов А. Ю. Прочность и пространственная устойчивость составных стержневых элементов конструкций из холоднотянутых профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2013. 25 с.

13. Белый Г. И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме // Строительная механика сооружений: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 40–48.

14. Аскинази В. Ю. Пространственная устойчивость двутавровых стержней с переменной высотой стенки в упруго-пластической стадии // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 4 (51). С. 46–55.

#### References

1. Belyy G. I. *Razvitie metodov rascheta stержnevyykh elementov stal'nykh konstrukciy pri mnogoparametricheskom zagruzheni* [Development of methods for calculating rod elements of steel structures under multi-parameter loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 3 (80), pp. 43–54.
2. Belyy G. I. «*Obratniy*» *metod rascheta usilivaemykh pod nagruzkoy stержnevyykh elementov stal'nykh konstrukciy putem uvelicheniya secheniy* [«Reverse» method of calculating steel structure rod elements reinforced under load by increasing cross sections]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 6 (83), pp. 46–55.
3. Vlasov V. Z. *Tonkostennyye uprugie stержzni* [Thin-walled elastic rods]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 565 p.
4. Vorob'yov V. Z. *Deformatsionniy raschet i ustoychivost' tonkostennykh stержney otkrytogo profilya* [Deformation calculation and stability of thin-walled rods of an open profile]. *Trudy Novocherkasskogo politekhn. in-ta* [In: Proceedings of the Novocherkassk Polytechnic University], 1958, vol. 69/63, pp. 3–48.
5. Broude B. M. *K teorii tonkostennykh stержney otkrytogo profilya* [Regarding the theory of thin-walled rods of an open profile]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Construction mechanics and calculation of structures*, 1960, no. 5, pp. 6–11.

6. Vorontsov G. V. *Malye prostranstvennyye kolebaniya, ustoychivost' i ustoychivaya prochnost' tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya* [Small spatial vibrations, stability and stable strength of thin-walled rods of an open profile]. *Izvestiya vuzov. Str-vo i arkhitektura – Bulletin of Higher Schools. Construction and Architecture*, 1965, no. 1, pp. 44–49.
7. Beylin E. A. *Obshchie uravneniya deformatsionnogo rascheta i ustoychivosti tonkostennykh sterzhney* [General equations of deformation calculation and stability of thin-walled rods]. *Stroit. mekhanika i raschet sooruzheniy – Building Mechanics and Calculation of Structures*, 1969, no. 5, pp. 35–41.
8. Beylin E. A., Belyy G. I. *O raschete uprugikh sistem, podverzhennykh odnovremennomu deystviyu aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [Regarding the calculation of elastic systems subjected to the simultaneous action of active and parametric loads]. *Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy – Building Mechanics and Calculation of Structures*, 1980, no. 32, pp. 30–34.
9. Belyy G. I. *O raschete uprugikh sterzhney po deformirovannoy skheme pri deystvii aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [On the calculation of elastic rods according to a deformed scheme under the action of active and parametric loads]. *Sb. nauch. tr. LISI «Mekhanika sterzhneykh sistem i sploshnykh sred»* [Collection of scientific works LISI “Mechanics of rod systems and continuous media”]. 1980, no. 32, pp. 41–48.
10. Rodikov N. N. *Ustoychivost' szhatykh s dvukhosnymi ekscentrisitetami sterzhneykh elementov konstrukciy iz otkrytykh profiley*. *Avtoref. disc. kand. tekhn. nauk* [Stability of rod elements of structures made of open profiles compressed with biaxial eccentricities. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1987, 22 p.
11. Pyatkin P. A. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' usilennykh pod nagruzkoy sterzhneykh elementov konstrukciy otkrytogo profilya*. *Avtoref. disc. kand. tekhn. nauk* [Strength and spatial stability of rod elements of open-profile structures reinforced under load. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2000, 24 p.
12. Kuznecov A. Yu. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' sostavnykh sterzhneykh elementov konstrukciy iz kholodnognutykh profiley*. *Avtoref. disc. kand. tekhn. nauk* [Strength and spatial stability of composite core elements of structures made of cold-bent profiles. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2013, 25 p.
13. Belyy G. I. *Raschet uprugoplasticheskikh tonkostennykh sterzhney po prostranstvenno-deformirovannoy skheme* [Calculation of elastic-plastic thin-walled rods according to a spatially deformed scheme]. *Trudy Mezhvuz. nauch. «Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy»* [Proceedings of the Inter-university sci.-pract. conference “Construction mechanics of structures”]. Leningrad, LISI Publ., 1983, pp. 40–48.
14. Askinazi V. Y. *Prostranstvennaya ustoychivost' dvutavrovyykh sterzhney s peremennoy vysotoy stenki v uprugo-plasticheskoy stadii* [Overall stability of tapered I-section members in elastoplastic stage]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 4 (51), pp. 46–55.