

Строительные конструкции

УДК 69.04

© Ф. А. Глебов, магистрант

© И. В. Астахов, канд. техн. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: fglebov.spb@mail.ru, 3557710@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-3-16-24

© F. A. Glebov, undergraduate

© I. V. Astakhov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: fglebov.spb@mail.ru, 3557710@mail.ru

МЕТОД N-ЛИНЕЙНЫХ КОМПОНЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ФЛАНЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ СТАЛЬНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

N-LINEAR COMPONENT METHOD FOR ANALYZING THE STRESS-STRAIN STATE OF FLANGE JOINTS OF STEEL BUILDING STRUCTURES

Рассматриваются основные проблемы компонентного метода, реализованного в Еврокоде 3, и предлагаются подходы к устранению существующих недостатков: исследуется возможность введения дополнительных *n*-линейных компонентов, в достаточной степени точно описывающих поведение фланцевого соединения для различных стадий напряженно-деформированного состояния узла. Определены ключевые аспекты и принципы моделирования узловых соединений с применением *n*-линейных компонентов, включая структуру компонентов, методы их моделирования. Выполнен анализ работы новой расчетной модели системы, построены теоретические диаграммы «усилие–перемещение ($F-\delta$) *n*-линейных компонентов и диаграммы «изгибающий момент–угол поворота ($M-\varphi$) для узла с *n*-линейными компонентами. Проведен численный эксперимент по моделированию типового узла и выполнено сравнение полученных результатов с теоретическими предпосылками.

Ключевые слова: фланцевые соединения, стальные конструкции, компонентный метод, пружинные компоненты, *n*-линейные компоненты, модифицированная жесткость, коэффициент жесткости, упруго-пластическая работа, модель напряженно-деформированного состояния, базовая модель узла, метод переменных параметров упругости.

The article discusses the main problems of the component method implemented in Eurocode 3 and offers approaches aimed at eliminating the existing shortcomings. The authors investigate the possibility of introducing additional *n*-linear components that sufficiently accurately describe the behavior of the flange joints for various stages of the stress-strain state of the connection. The key aspects and principles of modeling nodal connections using *n*-linear components, including the structure of components, methods of their modeling, are determined. The analysis of the performance of the new computational model of the system is carried out, theoretical diagrams of «force-displacement» ($F-\delta$) of *n*-linear components and diagrams of «flexing moment-angle of rotation» ($M-\varphi$) for a node with *n*-linear components are constructed. A numerical experiment on modeling a typical node is carried out and the results obtained are compared with theoretical prerequisites.

Keywords: flange joints, steel structures, component method, spring components, *n*-linear components, modified stiffness, stiffness coefficient, elastic-plastic performance, stress-strain state model, basic node model, method of variable elasticity parameters.

Введение

Фланцевые соединения стальных строительных конструкций являются узлами, обладающими значительной изгибной жесткостью и, следовательно, передающими изгибающий момент на соседние примыкающие к ним элементы.

В отечественной практике основные принципы расчета фланцевых соединений изложены в Рекомендациях¹, а также в типовой серии 2.440-2, выпуск 7².

Компонентный метод расчета узлов, обладающих изгибной жесткостью, реализованный в Еврокоде 3³, позволяет прогнозировать поведение фланцевых соединений при их работе на изгиб [1]. Данная методика заключается в определении прочности и податливости всех компонентов, входящих в узловое соединение (фланцевая пластина, полка колонны, стенка колонны, болты и т. д.). Каждый компонент схематизирован как элемент растяжения/сжатия, который характеризуется упругой реакцией в виде зависимости «усилие–деформация» ($F-\delta$). Затем элементы объединяются в механическую модель, определяющую жесткость на поворот всего узла в целом. Известно довольно

¹ Рекомендации по расчету, проектированию, изготовлению и монтажу фланцевых соединений стальных строительных конструкций / СО «Стальмонтаж», ВНИПИ «Промстальконструкция», ЦНИИПСК им. Мельникова / под ред. Н. В. Шалимовой. М.: ЦБНТИ, 1989. 53 с.

² Болтовые фланцевые рамные соединения балок с колоннами стальных каркасов зданий и сооружений // Типовые конструкции, изделия и узлы зданий и сооружений. Сер. 2.440-2. Вып. 7 / ВНИПИ «Промстальконструкция». Утв. Госстроем России 29.12.1993.

³ EN 1993-1-8. Eurocode 3. Design of Steel Structures. Part 1.8: Design of Joints. CEN Brussels, Belgium, 2005.

много исследований в данном направлении [2–5]. Пример подобной механической модели представлен на рис. 1.

Одной из ключевых характеристик, определяющих основные параметры соединения, является зависимость между моментом внешних сил M , воспринимаемым соединением, и углом поворота соединения φ , которая описывает всю совокупность его свойств: прочность, деформируемость и изгибную жесткость. Зависимость «изгибающий момент–угол поворота» ($M-\varphi$) также характеризует жесткость всех элементов (компонентов), составляющих соединение. Условно зависимость « $M-\varphi$ » можно представить как сумму зависимостей, характеризующих работу отдельных элементов узла.

В общем случае зависимость «изгибающий момент–угол поворота» является нелинейной и в целях упрощения расчета может моделироваться в виде билинейной зависимости (рис. 2, а). В основе данного подхода лежит упрощенная модель идеального упругопластического тела, которая представляет собой работу последовательно соединенных упругого и пластического элемента идеальной пластичности.

В этом случае не представляется возможным реализовать модель напряженно-деформированного состояния для различных промежуточных стадий работы элементов, входящих в данное узловое соединение, вплоть до образования пластического шарнира. Вместе с тем работа в упругопласти-

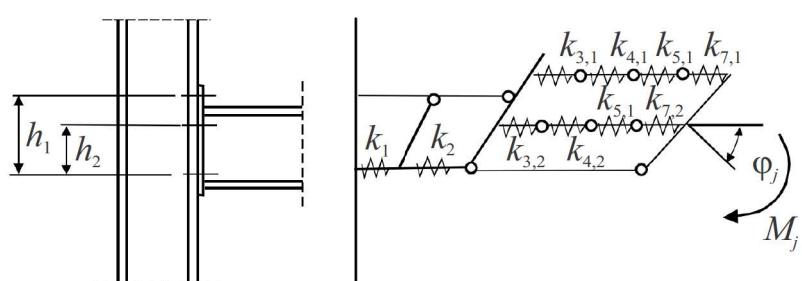


Рис. 1. Расчетная схема для определения изгибной жесткости фланцевого соединения компонентным методом [1]

ческой стадии отдельных компонентов, входящих в состав узла, не только не приводит к исчерпанию несущей способности соединения, но также позволяет в полной мере реализовать его диссипативный потенциал и повысить эффективность работы всей конструкции.

Базовая модель (рис. 2, б), реализованная в Еврокоде 3, предполагает описание жесткостных характеристик введением модифицированной жесткости соединения для различных стадий нагружения:

$$S_i = \frac{Ez^2}{\mu \sum_i k_i},$$

где k_i — коэффициенты жесткости i -го элемента узла; z — плечо внутренней пары сил; μ — коэффициент жесткости.

Коэффициент жесткости μ характеризуется зависимостью

$$\mu = \left(\frac{1,5M_{Ed}}{M_{Rd}} \right)^\psi,$$

где M_{Ed} — действующий изгибающий момент в соединении; M_{Rd} — расчетная несущая способность узла; ψ — параметрический коэффициент.

По своей сути коэффициент жесткости имитирует нелинейную работу всей базовой модели узла. Вместе с тем для одной и той же стадии нагружения может наблюдаться определенное различие в напряженно-деформированном состоянии отдельных

компонентов, входящих в расчетную модель данного соединения. В частности, работа узла может характеризоваться разрушением одних составляющих при частичных либо глубоких пластических деформациях других элементов, входящих в соединение. Значительное количество работ, посвященных фланцевым соединениям, затрагивает данную проблему [6–9].

Таким образом, моделирование работы узла с использованием единого коэффициента, определяющего его модифицированную жесткость, может привести к значительным погрешностям при анализе работы всей структуры соединения и некорректным результатам, полученным из соответствующей расчетной модели.

Предлагаемая в настоящей работе концепция n -линейных компонентов позволит значительно расширить возможности моделирования фланцевого соединения и отдельных его частей. Данная методика основана на введении в расчетную схему специальных элементов переменной жесткости с соответствующими параметрами упругого состояния, а также ряда упругопластических состояний для тех компонентов, для которых подобное поведение является возможным. Данный подход позволит в дальнейшем точнее оценивать как само значение модифицированной жесткости, так и соответствующие параметры всего узла в целом на различных

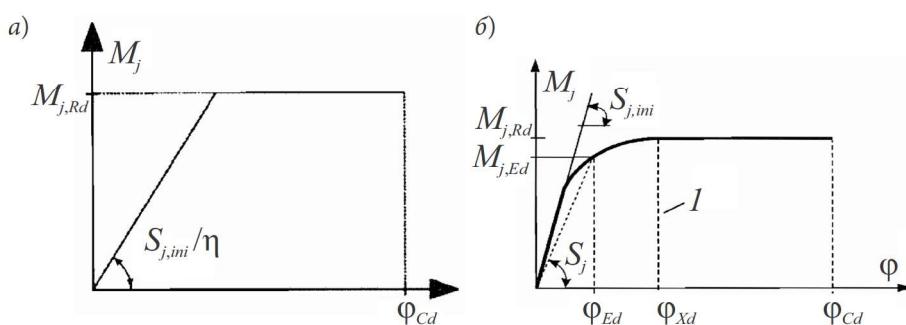


Рис. 2. Расчетная зависимость «изгибающий момент–угол поворота» узла, принятая в Еврокоде 3:
 а — упрощенная билинейная зависимость «изгибающий момент–угол поворота» узла;
 б — расчетная зависимость «изгибающий момент–угол поворота» базовой модели узла

стадиях его нагружения вплоть до разрушения соединения.

Методы

Ключевая особенность компонентного метода заключается в рассмотрении прочностных и деформационных характеристик каждого компонента, входящего в соединение. Опыт проектирования показывает, что одни элементы склонны к хрупкому разрушению, другие работают в условиях ограниченных пластических деформаций. В этом случае начальная жесткость k_u может быть определена в соответствии с обычной методикой ЕвроКода 3, ч. 1–8, а подробное описание механической модели подобных компонентов рассмотрено в работах [2–5]. Для третьей группы элементов характерна высокая пластичность. Эти компоненты склонны к переходу от начальной линейной упругой модели поведения к нелинейному режиму работы.

Принцип использования метода n -линейных компонентов состоит в том, что отдельные элементы, для которых характерна работа в условиях глубоких пластических деформаций, рассматриваются как нелинейно-упругий материал, характеризующийся кусочно-линейной зависимостью между деформациями и напряжениями.

Моделируются n -линейные компоненты в виде своеобразных пружинных элементов с числом n последовательных линейных участков, имитирующих диаграмму «усиление–деформация» для различных стадий напряженно-деформированного состояния. Упругопластическая жесткость k_{up} , характерная для данных последовательных линейных участков, определяется в зависимости от степени пластических деформаций назначением коэффициента приведения μ_n к начальной жесткости k_u .

Предельное значение коэффициента приведения μ_n соответствует коэффициенту жесткости k_p в стадии образования пластического шарнира.

Механическая модель n -линейного компонента может быть представлена диаграммой «усиление–перемещение», изображенной на рис. 3, на котором приняты следующие обозначения: k_u — начальная жесткость, характеризующая упругую стадию работы элемента; $k_{up1} \dots k_{upn}$ — модифицированные жесткости n последовательных линейных участков (в зависимости от глубины пластических деформаций), характеризующие упругопластическую стадию работы элемента; k_p — модифицированная жесткость, эквивалентная стадии работы в режиме глубоких пластических деформаций, момент образования пластического шарнира.

Компоненты, моделируемые в соответствии с базовой моделью ЕвроКода 3, принимаются с использованием стандартных обозначений от k_1 до k_{10} (например, k_1 — стенка колонны при сдвиге, k_{10} — болт при растяжении).

Введенные в расчетную модель взамен стандартных n -линейные компоненты принимаются с соответствующим индексом n (например, k_{4n} — полка колонны при изгибе, k_{5n} — опорный фланец при изгибе).

Механизм работы узлового соединения можно разделить на несколько этапов. На каждом этапе будет задействован один из участков жесткости n -линейных компонентов в зависимости от стадии напряженно-деформированного состояния.

На начальной стадии все компоненты работают в упругой области. При достижении внешней нагрузкой значений, соответствующих появлению в элементах пластических деформаций, для n -линейных компонентов включается соответствующая стадия упругопластической жесткости k_{upn} , повышая податливость соединения и вызывая соответствующее увеличение угла поворота на диаграмме « M – φ ».

Помере увеличения нагрузки в n -линейных компонентах продолжают включаться соответствующие стадии упругопластической

жесткости. Предельной является стадия образования пластического шарнира для *n*-линейного компонента (схема образования пластических шарниров показана на рис. 4, *a*). Далее состояние узла переходит в стадию отказа данного компонента и, следовательно, отказа того ряда пружин, в который упомянутый компонент входит. Достижение стадии отказа одного ряда пружин может не привести к выходу из строя всей системы, поскольку остальные, не отказавшие ряды пружин, могут перераспределить и воспринять существующую нагрузку.

Отказавший ряд удаляется из системы. Далее рассматривается новая система с оставшимися рядами пружин и определяется реакция этой системы на дальнейшее ее нагружение.

Таким образом, моделируя последовательный отказ оставшихся компонентов, появляется возможность изучить поведение соединения вплоть до окончательного его разрушения.

Принципиальная расчетная схема модели фланцевого соединения с применением метода *n*-линейных компонентов представлена на рис. 4, *г*.

Можно установить теоретическое соотношение между моментом приложения внешних сил к соединению и углом поворота соединения для каждого из последовательных участков жесткости *n*-линейных компонентов.

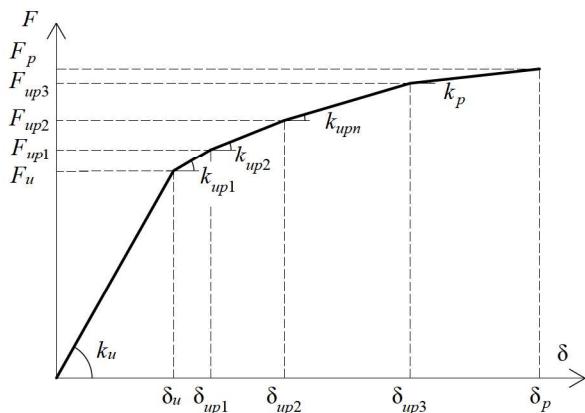


Рис. 3. Диаграмма «усилие–перемещение» *n*-линейного компонента

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии, являющегося частным случаем принципа виртуальной работы для упругих систем, полагаем равенство между работой внутренних и внешних сил, действующих на систему:

$$F_{up}\Delta = \int_0^l m_{up} \varphi_l dl,$$

где $F_{up}\Delta$ — работа внешних сил по деформированию элемента в упругопластической стадии; $\int_0^l m_{up} \varphi_l dl$ — работа внутренних сил деформированного элемента в упругопластической стадии; m_{up} — момент на единицу длины шарнирной линии; φ_l — угол поворота пластического шарнира; l — протяженность пластического шарнира в деформированном элементе.

Основные вопросы расчета стальных конструкций с учетом развития пластических деформаций изложены в Рекомендациях⁴. Принимая в упругой области сечения линейный закон распределения напряжений, для определения момента внутренних сил в упругопластической стадии при образовании пластического шарнира единичной протяженности (рис. 4, *б*) получим зависимость

$$m_{up} = 2\sigma_T \left(\int_{z_{T/2}}^{z/2} zdz + \frac{2}{z_T} \int_0^{z_{T/2}} z^2 dz \right),$$

где σ_T — предел текучести; z — расстояние от элементарных площадок поперечного сечения фланца единичной протяженности до нейтральной оси; z_T — область упругих деформаций.

Исходя из заданных параметров расчетной схемы (рис. 4, *г*), значение момента для упругопластической стадии может быть определено как

$$M_{up} = F_{up} z_{eq}.$$

В условиях нелинейной работы конструкции за основу вычисления коэффициентов

⁴ Рекомендации по расчету стальных конструкций на прочность по критерию ограниченных пластических деформаций / ЦНИИПСК им. Н. П. Мельникова / под ред. Н. Н. Стрелецкого. М.: ЦНИИпроектстальконструкция, 1985. 49 с.

приведения для получения модифицированной жесткости n -линейных компонентов был принят метод переменных параметров упругости (рис. 4, в) [10].

При работе элемента конструкции в стадии частичных и тем более глубоких пластических деформаций они могут достигать сравнительно больших величин. Вместе с тем из практического и экспериментального опыта можно сделать вывод о применимости гипотезы плоских сечений для моделирования поведения материала в пластической стадии.

Принимая изначально материал условно идеально упругим, получим

$$\sigma_*^{(1)} = \frac{M_{up} z}{J},$$

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\sigma_*^{(1)}}{E}.$$

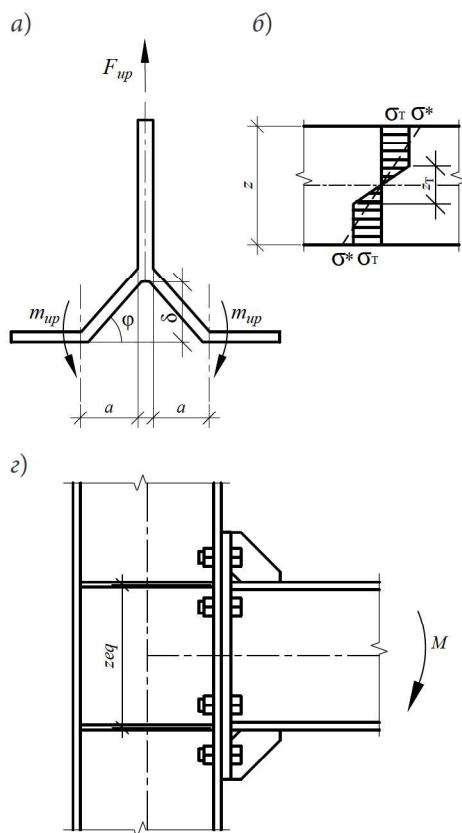


Рис. 4. Принципиальная расчетная схема модели фланцевого соединения с применением метода n -линейных компонентов: а — схема образования пластических шарниров в элементе; б — модель упругопластической работы элемента; в — расчетная схема метода переменных параметров упругости; г — расчетная схема с применением n -линейных компонентов

Во втором приближении, определяя поправку для секущего модуля, получим

$$E^{(2)} = \frac{\sigma_T}{\varepsilon^{(1)}}.$$

Далее для второго приближения находим

$$\sigma_*^{(2)} = E^{(2)} \left\{ \frac{M_{up} z}{B^{(2)}} \right\},$$

$$B^{(2)} = \int_F z^2 E^{(2)} dF,$$

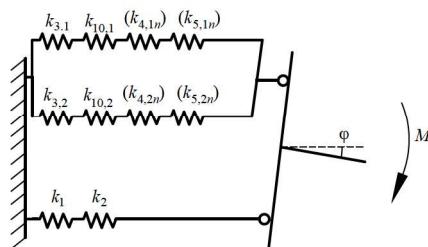
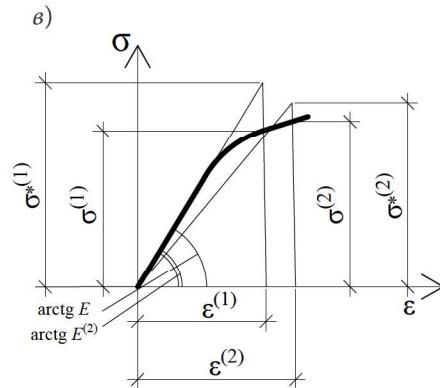
$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\sigma_*^{(2)}}{E^{(2)}}.$$

Значение секущего модуля для следующего приближения:

$$E^{(3)} = \frac{\sigma_T}{\varepsilon^{(2)}}.$$

Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений с заданной точностью Δ_1 :

$$\left| \sigma_*^{(n)} - \sigma_*^{(n-1)} \right| \leq \Delta_1.$$



Далее определяется коэффициент приведения модифицированной жесткости:

$$\mu_n = \frac{E}{E^{(n)}}.$$

Допуская малость перемещений по сравнению с размерами конструкции узла, с учетом вычисленных соответствующих коэффициентов приведения, определяем модифицированную жесткость базовой модели для каждой из n стадий упругопластического расчета:

$$S_{upn} = \frac{Ez^2}{\sum_i \frac{1}{k_i} + \sum_n \frac{\mu_n}{k_n}},$$

где $\sum_i \frac{1}{k_i}$ — составляющая коэффициентов жесткости для элементов, работающих в упругой стадии; $\sum_n \frac{\mu_n}{k_n}$ — составляющая коэффициентов жесткости для элементов, перешедших в упругопластическую стадию работы (n -линейные компоненты).

Далее по найденным параметрам строим характерную диаграмму работы фланцевого соединения «изгибающий момент-угол поворота» ($M-\varphi$) в виде кусочно-линейной за-

висимости, состоящей из отрезков, характеризующих работу соединения на различных стадиях нагружения. Полученные отрезки на диаграмме включают в себя упругую область, поэтапный рост пластических деформаций, а также этап образования пластического шарнира в соединении.

Результаты

За основу для проведения численного эксперимента был принят рамный узел соединения двутавровой балки 30Ш2 с колонной по серии 2.440-2. Соединение выполнено с применением гибкого фланца (группа А-I) толщиной 16 мм с одинаковым конструктивным решением в зоне верхнего и нижнего поясов для передачи обратного момента. Материал — сталь С345. Болты высокопрочные М24.

Расчет выполнялся по классической методике Еврокода 3, а также с применением метода n -линейных компонентов.

Характерная диаграмма «изгибающий момент-угол поворота» ($M-\varphi$) для рассматриваемого соединения приведена на рис. 5.

Как видно из графика, имеется значительное расхождение показателей жесткостных



Рис. 5. Диаграмма «изгибающий момент-угол поворота» фланцевого узла соединения двутавра 30Ш2 с колонной

характеристик узлового соединения при оценке по упрощенной методике Еврокода 3 и по методу *n*-линейных компонентов. Для метода *n*-линейных компонентов на начальном этапе нагружения зависимость имеет линейный характер. По мере увеличения нагрузки соединение начинает демонстрировать нелинейное снижение жесткости. График зависимости в этой области стремится к переходу в плавную кривую. Далее диаграмма имеет горизонтальный участок, описывающий пластическую стадию работы элементов соединения.

График зависимости «изгибающий момент-угол поворота» метода *n*-линейных компонентов по своей форме лучше согласуется с теоретической кривой базовой модели, предложенной в компонентном методе Еврокода 3.

Выводы

Расчет фланцевых соединений представляет собой достаточно сложную задачу. Основная сложность заключается в том, что деформационные характеристики соединения обладают нелинейностью и изменчивостью в зависимости от стадии нагружения как в упругой, так и в упругопластической области работы.

Предложенная методика существенно упрощает определение основных параметров соединения, особенно на предварительной стадии расчета, и позволяет моделировать работу узла с ограничением упругих и пластических деформаций в зависимости от требований, предъявляемых к расчетной модели.

Задача решается методом, при котором ключевые характеристики соединения определяются исходя из условий достижения требуемого предельного состояния. Степень развития пластических деформаций, а также сопутствующее данной стадии снижение жесткости моделируются в *n*-линейных компонентах введением соответствующих коэффициентов приведения. Полученная модель отражает все этапы работы узла вплоть до

наступления предельного состояния, образования глубоких пластических деформаций в элементах соединения (пластический шарнир) — стадии отказа компонента.

Можно видеть, что применение метода *n*-линейных компонентов позволяет с достаточной степенью точности моделировать характер поведения конструкции на всех этапах нагружения, особенно в контролируемых параметрах упругопластической работы. Этот подход может существенно повысить эффективность применения фланцевых соединений в узлах стальных строительных конструкций.

Вместе с тем применимость данного метода требует экспериментальной проверки и подтверждения. Для решения подобной задачи необходимо проводить дальнейшие исследования в данной области.

Библиографический список

1. Kurobane Y., Packer J. A., Wardenier J., Yeomans N. Design guide for structural hollow section column connections. Köln, 2004. 213 p.
2. Wan W., Yan S., Zhang H., Rasmussen K. J. R. A generalised component method for bolted angle connections // Journal of Constructional Steel Research. 2022. Vol. 198 (11). 107530. doi:10.1016/s0143974X2200400X.
3. Tschemmernegg F., Humer C. The design of structural steel frames under consideration of the nonlinear behaviour of joints // Journal of Constructional Steel Research. 1988. Vol. 11 (2). Pp. 73–103. doi:10.1016/s0143974X88900454.
4. Da Silva L. S., Santiago A., Real P. V. Post-limit stiffness and ductility of end-plate beam-to-column steel joints // Computers and Structures. 2002. Vol. 80 (5). Pp. 515–531.
5. Zhu C. Full-range Moment-Rotation Behaviour of Bolted Moment End-Plate Joints: Ph.D Thesis. Faculty of Engineering and IT School of Civil Engineering, The University of Sydney, 2016.
6. Kulak G. L., Fisher J. W., Struik J. H. A. Guide to design criteria for bolted and riveted Joints. 2nd ed. Chicago: American Institute of Steel Construction, 2001. 352 p.
7. D'Aniello M., Tartaglia R., Costanzo S., Landolfo R. Seismic design of extended stiffened end-plate joints in the framework of Eurocodes // Journal of Constructional Steel

Research. 2017. Vol. 128 (1). Pp. 512–527. doi:10.1016/s0143974X16304205.

8. Bezerra L. M., Bonilla J., Freitas C. S., Massicotte B. Behavior of T-stub steel connections bolted to rigid bases // Journal of Constructional Steel Research. 2022. Vol. 192. Pp. 73–103. doi:10.1016/s0143974X22001146.

9. Yuan-Qi Li, Fu-Wei Wu, Ming-Qing Tan. Static performance of non-through one-side bolted end-plate joint for floor-by-floor assembled steel structures // Structures. 2023. Vol. 48. Pp. 288–303. doi:10.1016/s2352012422012711.

10. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.

References

1. Kurobane Y., Packer J. A., Wardenier J., Yeomans N. *Design guide for structural hollow section column connections*. Köln, 2004, 213 p.

2. Wan W., Yan S., Zhang II., Rasmussen K. J. R. A generalised component method for bolted angle connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 2022, vol. 198 (11), 107530. DOI: 10.1016/s0143974X2200400X.

3. Tschemmernegg F., Humer C. The design of structural steel frames under consideration of the nonlinear behaviour of joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 1988, vol. 11 (2), pp. 73–103. DOI: 10.1016/s0143974X88900454.

4. Da Silva L. S., Santiago A., Real P. V. Post-limit stiffness and ductility of end-plate beam-to-column steel joints. *Computers and Structures*, 2002, vol. 80 (5), pp. 515–531.

5. Zhu C. *Full-range Moment-Rotation Behaviour of Bolted Moment End-Plate Joints: Ph.D Thesis*. Faculty of Engineering and IT School of Civil Engineering, the University of Sydney Publ., 2016.

6. Kulak G. L., Fisher J. W., Struik J. H. A. *Guide to design criteria for bolted and riveted joints*. 2nd ed. Chicago, American Institute of Steel Construction Publ., 2001, 352 p.

7. D'Aniello M., Tartaglia R., Costanzo S., Landolfo R. Seismic design of extended stiffened end-plate joints in the framework of Eurocodes. *Journal of Constructional Steel Research*, 2017, vol. 128 (1), pp. 512–527. DOI: 10.1016/s0143974X16304205.

8. Bezerra L. M., Bonilla J., Freitas C. S., Massicotte B. Behavior of T-stub steel connections bolted to rigid bases. *Journal of Constructional Steel Research*, 2022, vol. 192, pp. 73–103. DOI: 10.1016/s0143974X22001146.

9. Yuan-Qi Li, Fu-Wei Wu, Ming-Qing Tan. Static performance of non-through one-side bolted end-plate joint for floor-by-floor assembled steel structures. *Structures*, 2023, vol. 48, pp. 288–303. DOI: 10.1016/s2352012422012711.

10. Birger I. A., Mavlyutov R. R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 p.