УДК 624.074.5
DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-5-46-51

© *В. А. Мелешко*, канд. техн. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vl-meleshko@yandex.ru
© *О. В. Голых*, канд. техн. наук, главный конструктор
(ООО «ИК «Город-А»)
E-mail: volgate@mail.ru
© *Л. Н. Кондратьева*, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: kondratjevaln@yandex.ru

© *V. A. Meleshko*, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: vl-meleshko@yandex.ru
© *O. V. Golyh*, PhD in Sci. Tech., Chief Designer
(LLC EC «City-A»)
E-mail: volgate@mail.ru
© *L. N. Kondratieva*, Dr Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: kondratjevaln@yandex.ru

ОСОБЕННОСТИ ФОРМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

FEATURES OF THE FINITE ELEMENT METHOD FORMS IN THE ELASTIC-PLASTIC COMPUTATION OF ROD SYSTEMS

Рассмотрены основные особенности классических методов строительной механики для расчета статически неопределимых стержневых систем. Изложены формулировки метода конечных элементов в форме метода перемещений и метода сил. Отмечены преимущества и недостатки двух форм метода конечных элементов, в том числе при упругопластическом расчете стержневых систем. Показаны отличительные особенности и преимущества дискретно-аналитических методов при расчете стержневых систем.
Ключевые слова: формы МКЭ, упругопластические деформации, обобщенный метод сил, формула Мора, касательная жесткость, статически неопределимые системы.

The main features of classical methods of structural mechanics for calculation of statically indeterminable rod systems are considered. The formulations of the finite element method in the form of the displacement method and the force method are presented. The advantages and disadvantages of two forms of finite element method are revealed, including those in the elastic-plastic calculation of rod systems. The distinctive features and advantages of discrete analytical methods in the calculation of core systems are shown.
Keywords: FEM forms, elastic-plastic deformations, generalized flexibility method, Mohr's formula, tangential stiffness, statically indeterminate systems.

Введение

Для оценки строительных конструкций на прочность прибегают к различным аналитическим и численным методам расчета.

Аналитические методы позволяют получить решение в общем виде для несложных расчетных схем и определить изменение различных параметров, например, перемещений, усилий, напряжений, в любом месте, а также, используя общую формулировку, проанализировать степень влияния различных факторов на прочность и состояние конструкции. Такие методы возможно использовать для решения линейных задач.

При решении задач, связанных с определением упругопластических деформаций, необходимо проводить нелинейный анализ в программных комплексах, основанных на численном методе конечных элементов (МКЭ). На практике для такого типа анализа аналитические методы не подходят. В большинстве случаев в качестве идеализированных расчетных схем используются стержневые системы. Здесь возможно нелинейное решение с использованием обобщения классических методов строительной механики — метода сил и метода перемещений.

Целью данной работы является обзор классических методов строительной механики как форм метода конечных элементов; выявление достоинств и недостатков МКЭ при упругопластическом расчете стержневых систем; описание дискретно-аналитических постановок при решении нелинейных задач.

Методы

Рассмотрим аналитические методы расчета конструкций. Основные особенности метода сил и метода перемещений строительной механики заключаются в определении внутренних усилий в статически неопределимых (СН) системах [1, 2]. В обоих методах можно выделить одинаковые этапы, к числу которых можно отнести установление количества неизвестных. Метод сил и метод перемещений предполагают использование основной системы (ОС), эквивалентной заданной схеме. В методе сил ОС принимают статически определимой и получают путем удаления лишних связей. Для одной и той же системы можно предложить множество вариантов ОС, удовлетворяющих всем необходимым требованиям, поэтому одной из главных задач является выбор рациональной ОС. В расчетах методом перемещений ОС принимается в одном-единственном варианте путем введения дополнительных связей и получения кинематически определимой конструкции. Для многих рамных каркасов она позволяет получить неполные канонические уравнения и тем самым упростить расчет. Рассмотрим определение статической и кинематической неопределимости, а также получение ОС на примере одной рамы (рис. 1).

Канонические уравнения метода сил и метода перемещений очень близки по структуре, однако отличается физический смысл этих уравнений и входящих в них величин. В обоих методах в ОС строятся единичные и грузовая эпюры внутренних усилий изгибающих моментов. В методе перемещений для построения эпюр используют готовые табличные решения. Построения окончательных эпюр внутренних усилий в обоих методах реализуются путем решения канонических уравнений.

При выборе метода расчета стержневой системы, как правило, предпочтение отдают методу с меньшим количеством неизвестных: если $n_с < n_к$, используют метод сил, если $n_с > n_к$ — метод перемещений. При равном количестве неизвестных ($n_с = n_к$) выбирают метод перемещений, поэтому выбор одного или другого метода расчета зависит прежде всего от числа основных неизвестных. Каждый из предложенных методов целесообразно применять для определенного типа расчетных схем и расчета стержневой системы данного типа.

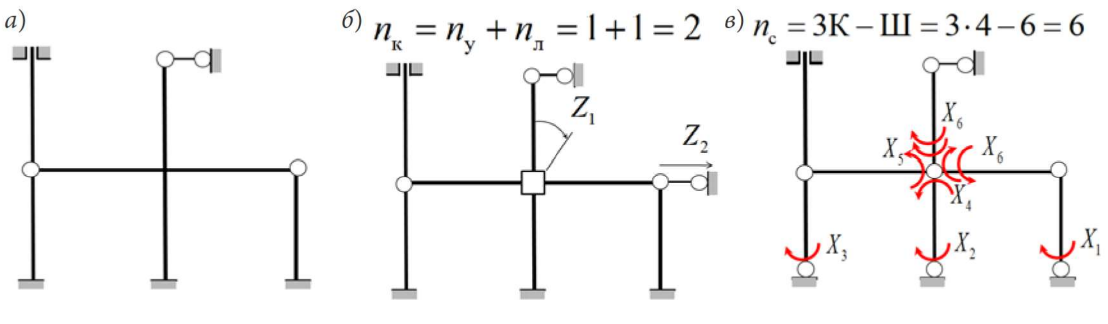

Рис. 1. Статическая и кинематическая неопределимость: *а* — плоская рама; *б* — ОС метода перемещений; *в* — один из вариантов ОС метода сил

Следует отметить, что для определенного типа конструкций целесообразно применение смешанного метода. В одной части конструкции основная система (ОС) смешанного метода образуется заменой лишних связей неизвестными усилиями и моментами, а в другой части — добавлением связей. Соответственно, получается система уравнений с комбинированными неизвестными — усилиями и перемещениями. Данный метод целесообразно применять для статически неопределимых рам, у которых в одной части много шарниров, а в другой — жестких узлов.

Аналитические методы практически неприменимы к расчету конструкций сложных форм, поэтому используются численные методы расчета, в частности МКЭ [3, 4], который с развитием компьютерной техники получил широкое распространение в программных комплексах. Для стержневых систем можно использовать прямой МКЭ в перемещениях с известной локальной матрицей жесткости, которую можно получить, используя методы строительной механики для определения единичных узловых реакций стержня (коэффициентов жесткости) или единичные функции формы полиномов Эрмита, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению упругой линии. Здесь система уравнений МКЭ будет совпадать с каноническими уравнениями метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}u_1 + \ldots + r_{1n}u_n + R_{1P} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}u_1 + \ldots + r_{nn}u_n + R_{nP} = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где r_{ij} — коэффициенты жесткости; u_i — неизвестные перемещения.

Заменим реакции r на k и запишем систему равновесных уравнений МКЭ в матричном виде:

$$\{P\} = [K] \cdot \{\Delta\}. \qquad (2)$$

Матрица жесткости системы $[K]$ формируется на основе локальных матриц жесткости элемента $[K^e]$. Например, для плоского стержневого элемента с четырьмя степенями свободы матрица жесткости равна:

$$[K] = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ \hline -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{array}\right]. \qquad (3)$$

Если рассматривать нелинейный расчет стержневой системы, то здесь необходимо учитывать деформированную схему с последовательным нагружением. Чтобы точно определить напряжения в сечениях, нужно знать деформации в узлах и распределение жесткости по длине стержня, а это достигается путем деления стержня на конечные элементы, т. е. увеличением общего числа конечных элементов.

Результаты

В отличие от численного МКЭ численно-аналитическая постановка задачи позволяет исключить конечные элементы при формировании системы алгебраических уравнений и заменить их участками, на которых происходит интегрирование распределенных параметров жесткости. Таким образом, можно снизить количество уравнений в системе.

Используя функции формы стержневого элемента [5] и формулы для интегральной касательной (пластической) жесткости сечения [6, 7], можно получить выражение для пластической матрицы жесткости стержневого элемента. Для плоского стержневого элемента с четырьмя степенями свободы (рис. 2) она будет равна:

$$\left[K_{pl}{}^{e}\right] = T(\tau)\int_0^l \frac{d^2[N(x)]^{\mathrm{T}}}{dx^2}\frac{d^2[N(x)]}{dx^2}dx =$$

$$= T(\tau)\int_0^l \begin{bmatrix} N_2'' \\ N_3'' \\ N_5'' \\ N_6'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2'' & N_3'' & N_5'' & N_6'' \end{bmatrix} dx, \qquad (4)$$

где $N(x)$ — функции формы стержневого элемента; $\tau(x)$ — безразмерный параметр, который характеризует упругопластическое состояние в сечении стержня [8]:

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_s}; \tag{5}$$

$$\varepsilon(x) = \chi(x)\frac{h}{2}; \tag{6}$$

$$\chi(x) = \frac{M(x)}{T(\tau)}, \tag{7}$$

где ε_s — деформация, соответствующая пределу текучести σ_s; ε — деформация в крайних волокнах; χ — кривизна стержня в рассматриваемом сечении; h — высота сечения.

Все эти параметры определяются на каждом шаге нагружения.

Кривизна зависит от жесткости сечения на предыдущем шаге. Матрица жесткости пространственного стержневого макроэлемента приведена в [9, 10]. Решение нелинейных задач шаговыми и итерационными методами рассмотрено в [11, 12].

Матрицу жесткости можно определить методом сил, используя обобщенную формулу Мора [13] для определения перемещений. Здесь метод сил используется для определения реакций в отброшенных связях (коэффициентов жесткости) с учетом физической нелинейности, что достигается использованием матрицы касательных жесткостей для пространственного стержня. Для плоской задачи применяется интегральная пластическая жесткость стержня $T(\tau)$.

Рассмотрим вывод матрицы жесткости стержневого макроэлемента, используя метод сил с обобщенной формулой Мора. Для жестко заделанного стержня с двух сторон представим свободные члены от единичных смещений в виде

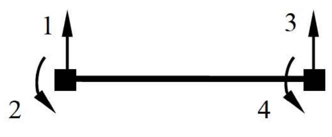

Рис. 2. Степени свободы стержневого элемента

$$\Delta_{i\Delta} = -\sum X_i \cdot \Delta_i, \tag{8}$$

где X_i — реакции от единичных сил или моментов в основной системе; $\Delta_{i\Delta}$ — перемещение по направлению i связи от единичного смещения Δ.

Представим канонические уравнения метода сил в матричном виде:

$$[\delta]\{X\} + \{\Delta\} = 0, \tag{9}$$

матрица податливости для консольной балки будет равна:

$$[\delta] = \int_0^l [P_e] \cdot [T]^{-1} [P_e]^T dx. \tag{10}$$

Для плоского стержня

$$[P_e] = [M_e \quad Q_e], \tag{11}$$

где M_e, Q_e — эпюры моментов и внутренних усилий от приложения единичной силы и единичного момента.

Используя обобщенную формулу Мора, нетрудно получить функции формы. Формулы для определения функций форм пространственного стержня приведены в [10]. В работах [7, 9, 14, 15] предложены алгоритмы расчета стержневых систем с учетом нелинейного поведения. Проведено сравнение результатов с методом конечных элементов.

Рассмотрим МКЭ в форме метода сил. Здесь можно воспользоваться классической системой уравнений (9), но на практике это не совсем удобно, так как придется выбирать основную, геометрически неизменяемую систему. Теоретически для конечно-элементной модели можно записать функционал для полной энергии системы на основе вариационного принципа Кастильяно, при этом должна получиться система разрешающих уравнений, но на практике возникают определенные трудности. Для того чтобы реализовать нелинейный метод сил не в классической постановке, требуется разработка специального механизма формирования системы уравнений совместности деформаций и специальный конечный элемент с функцией формы, которая удовлетворяла бы одновременно всем статическим краевым условиям (внутренним усилиям и моментам в узлах), так как матрица податливости стержневого элемента будет неоднозначно определена. Это связано с существованием различных основных систем.

Обсуждение

Приведем преимущества и недостатки двух форм МКЭ, где главным образом используется метод перемещений. Это связано с выбором основной системы, способом формирования равновесных уравнений, определением матрицы жесткости и вектора внешних нагрузок. При этом в классическом методе сил есть неоспоримое преимущество — отсутствует необходимость определять локальную матрицу жесткости стержня.

Рассмотрим более подробно плюсы и минусы двух форм МКЭ при нелинейном расчете. Преимущества метода сил заключаются в прямом построении матрицы податливости и точном определении напряжений. Но при использовании метода сил необходимы дополнительные выражения для определения полных перемещений. А при расчете конструкций с жесткими связями количество неизвестных возрастает по сравнению с методом перемещений. Кроме этого, при формировании системы уравнений существуют трудности.

К преимуществам метода перемещений можно отнести простой механизм формирования разрешающей системы уравнений и меньшее количество неизвестных при жестком соединении стержней, а также получение перемещений и учет геометрической нелинейности. Но существует погрешность при определении напряжений, так как они вторичны. Есть необходимость в определении промежуточной матрицы жесткости, но при использовании функций форм для определения коэффициентов жесткости в узлах эта необходимость отпадает. Метод перемещений не позволяет учитывать абсолютно жесткие стержни.

Выводы

Таким образом, наиболее подходящим способом оптимизации нелинейного анализа является гибридный подход. Он заключается в том, что для определения перемещений в узлах стержневой системы применяется классический МКЭ, а для определения внутренних усилий в стержне используются интегральные аналитические выражения. Применение таких выражений позволяет понизить порядок дискретизации за счет замены конечных элементов на участки интегрирования и уменьшить время расчета.

Библиографический список

1. *Довнар Е. П., Коршун Л. И.* Строительная механика. Минск: Вышэйшая школа, 1986. 310 с.
2. *Дарков А. В., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
3. *Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М.* Численные методы решения задач строительной механики. Минск: Вышэйшая школа, 1990. 351 с.
4. *Игнатьев А. В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 1 // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 37–57.
5. *Лукашевич А. А.* Современные численные методы строительной механики. Хабаровск: ХГТУ, 2003. 135 с.
6. *Мелешко В. А.* Дискретно-аналитические соотношения для нелинейного расчета плоских стержневых систем // Инновационные технологии и технические средства специального назначения: труды 12-й общерос. науч.-практ. конф. Санкт-Петербург, 20–22 ноября 2019 г. В 3 т. Т. 2. СПб.: БГТУ, 2020. С. 63–68. (Библиотека журнала «Военмех. Вестник БГТУ». № 63.)
7. *Глухих В. Н., Масленников А. М., Кондратьева Л. Н., Мелешко В. А., Сухотерин М. В.* Пластическая матрица жесткости плоского стержневого макроэлемента для дискретно-аналитического расчета прочности // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 6 (89). С. 66–71.
8. *Островская Н. В., Мелешко В. А.* Аналитические зависимости для касательных жесткостей сечений при упругопластическом расчете плоских стержневых систем // Морские интеллектуальные технологии. 2017. № 4-1 (38). С. 183–188.
9. *Meleshko V. A., Rutman Yu. L.* Force method development in structural mechanics for the nonlinear tasks. FEM hybrid models // Proceedings of 6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6), 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7). 11–15 June 2018, Glasgow, UK. Pp. 719–729.

http://eccm-ecfd2018.org/frontal/docs/Ebook-Glasgow-2018-ECCM-VI-ECFD-VII.pdf.

10. *Meleshko V. A.* Hybrid formulations of the FEA for nonlinear analysis of rod systems // Volkan Kahya (Ed.). Advancements in Civil Engineering and Architecture. Vol. 1: Civil Engineering. Proceedings of the International Civil Engineering & Architecture Conference. 17–20 April 2019, Trabzon, Turkey. Pp. 1050–1057.

11. *Лукашевич А. А.* Нелинейные задачи строительной механики. СПб.: СПбГАСУ, 2016. 136 с.

12. *Трушин С. И.* Метод конечных элементов. Теория и задачи. М.: АСВ, 2008. 256 с.

13. *Meleshko V. A., Rutman Yu. L.* The generalization of the flexibility method for an elasto-plastic calculation of rod systems // Materials physics and mechanics. 2017. Vol. 31. Pp. 67–70.

14. *Meleshko V. A., Rutman Yu. L.* Generalized flexibility method by the example of plane elastoplastic problem // Procedia Structural Integrity. 2017. Vol. 6. Pp. 140–145.

15. *Meleshko V. A.* Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem // Procedia Structural Integrity. 2017. Vol. 6. Pp. 115–121.

References

1. Dovnar E. P., Korshun L. I. *Stroitel'naya mekhanika* [Construction Mechanics]. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1986, 310 p.

2. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naya mekhanika* [Construction Mechanics]. Moscow Vysshaya shkola Publ., 1986, 607 p.

3. Il'in V. P., Karpov V. V., Maslennikov A. M. *Chislennye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki* [Numerical methods for solving problems of structural mechanics]. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1990, 351 p.

4. Ignat'ev A. V. *Osnovnye formulirovki metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki* [Basic formulations of the finite element method in problems of structural mechanics]. Pt. 1. *Vestnik MGSU – Bulletin of MSCU*, 2014, no. 11, pp. 37–57.

5. Lukashevich A. A. *Sovremennye chislennye metody stroitel'noy mekhaniki* [Currently used numerical methods of structural mechanics]. Khabarovsk, KhGTU Publ., 2003, 135 p.

6. Meleshko V. A. *Diskretno-analiticheskie sootnosheniya dlya nelineynogo rascheta ploskikh sterzhnevykh sistem* [Discrete analytical relations for nonlinear calculation of flat rod systems]. *Trudy 12-y obshcheros. nauch.-prakt. konf. Sankt-Peterburg, 20–22 noyabrya 2019 g «Innovatsionnye tekhnologii i tekhnicheskie sredstva spetsial'nogo naznacheniya»* [Proceedings of the 12-th All-Russian scientific and practical conf., St. Petersburg, November 20-22, 2019, "Innovative technologies and technical means of special purpose"]. In 3 vols. Vol. 2. St. Petersburg, BGTU Publ., 2020, pp. 63–68. (Library of the journal «Voenmekh. Vestnik BGTU». no. 63.)

7. Glukhikh V. N., et al. *Plasticheskaya matritsa zhestkosti ploskogo sterzhnevogo makroelementa dlya diskretno-analiticheskogo rascheta prochnosti* [Plastic stiffness matrix of a flat rod macro-element for discrete-analytical strength calculation]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2021, no. 6 (89), pp. 66–71.

8. Ostrovskaya N. V., Meleshko V. A. *Analiticheskie zavisimosti dlya kasatel'nykh zhestkostey secheniy pri uprugoplasticheskom raschete ploskikh sterzhnevykh sistem* [Analytical dependences for tangent stiffness of sections at elastic-plastic calculation of flat rod systems]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2017, no. 4-1 (38), pp. 183–188.

9. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. Force method development in structural mechanics for the nonlinear tasks. FEM hybrid models. *Proceedings of the 6-th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6), 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7). 11–15 June 2018*, Glasgow, UK. Pp. 719–729. http://eccm-ecfd2018.org/frontal/docs/Ebook-Glasgow-2018-ECCM-VI-ECFD-VII.pdf.

10. *Meleshko V. A.* Hybrid formulations of the FEA for nonlinear analysis of rod systems. Volkan Kahya (Ed.). *Advancements in Civil Engineering and Architecture. Vol. 1: Civil Engineering. Proceedings of the International Civil Engineering & Architecture Conference. 17–20 April 2019,* Trabzon, Turkey, pp. 1050–1057.

11. Lukashevich A. A. *Nelineynye zadachi stroitel'noy mekhaniki* [Nonlinear problems of structural mechanics]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2016, 136 p.

12. Trushin S. I. *Metod konechnykh elementov. Teoriya i zadachi* [Finite element method. Theory and problems.] Moscow, ASV Publ., 2008, 256 p.

13. Meleshko V. A., Rutman Yu. L. The generalization of the flexibility method for an elasto-plastic calculation of rod systems. *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. 31, pp. 67–70.

14. *Meleshko V. A., Rutman Yu. L.* Generalized flexibility method by the example of plane elastoplastic problem. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 140–145.

15. *Meleshko V. A.* Generalized force method on the example of plane geometrically nonlinear problem . *Procedia Structural Integrity,* 2017, vol. 6, pp. 115–121.