

Строительная механика и расчет сооружений

УДК 539.3:625.85:519.6

© Г. Н. Ширунов, д-р техн. наук, профессор
(Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: guriyn@mail.ru

© Д. А. Сарвилин, главный специалист
(ООО «ТЕКТОН-СПб»,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: sarvilin@tekton-spb.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2024-21-1-30-36

© © G. N. Shirunov, Dr. Sci. Tech., Professor
(Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: guriyn@mail.ru

© D. A. Sarvilin, senior structural engineer
(TEKTON-SPb LLC,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: sarvilin@tekton-spb.ru

ВЕЛИЧИНА МАКСИМАЛЬНЫХ РАСТЯГИВАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТАНДАРТНОМ БАЛОЧНОМ АСФАЛЬТОБЕТОННОМ ОБРАЗЦЕ ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ

THE VALUE OF MAXIMUM TENSILE STRESSES IN A STANDARD BEAM ASPHALT-CONCRETE SAMPLE IN THREE-POINT BENDING

Приводятся данные расчетов нормальных напряжений в стандартном балочном образце при различных соотношениях высоты образцов к пролету, принимаемые в качестве расчетной характеристики асфальтобетонов на растяжение. Расчеты выполнены с помощью метода конечных элементов для моделей в условиях плоского напряженного состояния. Показано, что величины краевых нормальных напряжений, получаемые на основе формулы сопротивления материалов, оказываются завышенными, что переоценивает прочностную характеристику материала на растяжение. Установлена зависимость погрешности стандартной формулы от относительной высоты образца, получена формула для вычисления поправочного коэффициента.

Ключевые слова: прочность асфальтобетона, изгиб, растягивающие напряжения, балочный образец, плоское напряженное состояние, теория упругости.

The paper considers the data for calculating normal stresses in a standard beam sample at different ratios of the height of the samples to the span, taken as the calculated tensile characteristics of asphalt concrete. Calculations were performed using the finite element method for models under plane stress conditions. It is shown that the values of edge normal stresses obtained on the basis of the formula of resistance of materials are overestimated, which results in overstating the tensile strength characteristic of the material. There has been established dependence of the error of the standard formula on the relative height of the sample, and a formula for calculating the correction factor has been obtained.

Keywords: strength of asphalt concrete, bending, tensile stresses, beam sample, plane stress state, theory of elasticity.

Введение

Экспериментальное определение прочности на одноосное растяжение хрупких материалов, к которым относится асфальтобетон при низких температурах, в отличие от ис-

пытаний на сжатие [1, 2] связано с изготовлением достаточно сложных образцов, оснастки и оборудования для проведения экспериментов, что при массовых испытаниях требует значительных трат времени и ресурсов

[3–5]. Поэтому для получения прочностных характеристик пользуются косвенными методами испытаний, основанными на расчетных схемах, предполагающих разрушение образцов простой геометрической формы от растягивающих напряжений путем отрыва. К ним относятся определение бразильской прочности (растяжение при расколе цилиндров) и испытание балочек на изгиб по трех- или четырехточечной схеме нагружения. При испытании образцов на раскол в качестве базовой применяется формула нормальных напряжений, действующих по площадкам диаметрального сечения, полученная из решения линейной задачи теории упругости о сжатии цилиндра встречными сосредоточенными силами [6–10], а для балочных образцов применяется формула сопротивления материалов для изгибаемого бруса. При этом нормальные напряжения достигают величины прочности не по всему контрольному сечению образца, а только вдоль одной линии [11]. Для горных пород, бетонов на минеральном вяжущем в формулы линейно-упругих решений вводятся комплексные поправочные коэффициенты, определенные экспериментально и учитывающие как неупругие деформации, так и отклонение действительного распределения от линейного решения теории упругости или сопротивления материалов [6, 12].

Определение прочности асфальтобетонов для дорожных конструкций путем косвенных испытаний в соответствии с действующими нормами проводят на основе испытаний балочек прямоугольного поперечного сечения на изгиб по схеме трехточечного или четырехточечного нагружения. ГОСТ Р 58401.11–2019, регламентирующий испытания материалов на усталость¹, предписывает изготовление образцов с соотношением высоты сечения к длине пролета менее чем 1 : 7,14, т. е. низких балочек, для которых фор-

мула сопротивления материалов, используемая при обработке экспериментальных данных, дает достаточно точный результат для контролируемых нормальных напряжений.

ГОСТ Р 58406.6–2020², регламентирующий правила определения прочности асфальтобетонов, предписывает вычислять величину максимальных растягивающих напряжений по формуле сопротивления материалов, которая предполагает линейное распределение напряжений по высоте сечения:

$$\sigma_{\max} = R_{\text{изг}} = \frac{3Pl}{2bh^2}, \quad (1)$$

где $R_{\text{изг}}$ — предел прочности на растяжение; P — величина сосредоточенной силы в середине пролета, соответствующей разрушению; l — пролет балочки; b и h — ширина и высота поперечного сечения (рис. 1).

При этом расстояние между опорами балочки задано в 20 см, а высоту образцов, во избежание значительного влияния на прочность локальных включений, исходя из максимального размера зерен заполнителя, требуется определять по табл. 1 ГОСТ Р 58406.4–2020³ для трех диапазонов: менее 16 мм, от 16 до 31,5 мм и более 31,5 мм. Для первого диапазона высота образцов составляет 4,0 см, второго — 5,5 и для третьего — 8,0 см. Допустимое отклонение размеров по высоте изготавливаемых образцов составляет ± 5 мм. Следовательно, неблагоприятные высоты, для которых величины напряжений, определяемые по формуле (1), будут иметь наибольшие погрешности, соответствуют размерам 4,5; 6,0 и 8,5 см. Для этих случаев отношение высот образцов к пролету h^* составит 1/4,44; 1/3,33 и 1/2,35, что требует рассматривать образцы не как брусья, а как балки-стенки.

² ГОСТ Р 58406.6–2020. Дороги автомобильные общего пользования. Смеси асфальтобетонные дорожные и асфальтобетон. Метод определения предела прочности на растяжение при изгибе и предельной относительной деформации растяжения.

³ ГОСТ Р 58406.4–2020. Дороги автомобильные общего пользования. Смеси асфальтобетонные дорожные и асфальтобетон. Приготовление образцов-плит вальцовым уплотнителем.

¹ ГОСТ Р 58401.11–2019. Дороги автомобильные общего пользования. Смеси асфальтобетонные дорожные и асфальтобетон. Метод определения усталостной прочности при многократном изгибе.

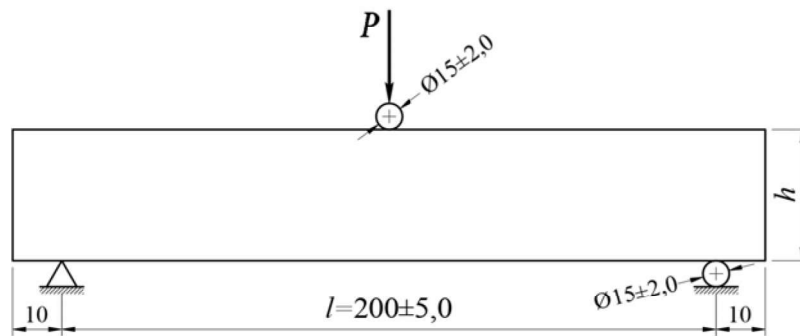
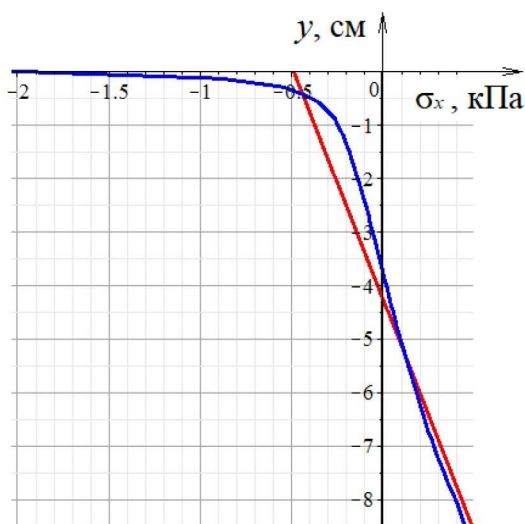


Рис. 1. Схема испытания стандартного балочного образца

Действительное распределение нормальных напряжений по высоте сечения отличается от линейного закона. При этом такое отличие связано как с локальными искажениями, обусловленными характером приложения нагрузки, так и с соотношением высоты сечения балочки к ее пролету

$$h^* = \frac{h}{l},$$

с ростом которой оно увеличивается [4, 13, 14]. Для образца трехточечного изгиба характер приложения нагрузки существенно влияет только на нормальные напряжения в сжатой зоне центрального сечения, а для контролируемых растягивающих напряжений

Рис. 2. Распределение нормальных напряжений σ_x в центральном сечении по высоте полосы $h = 8,5$ см, нагруженной сосредоточенной силой 1 кН на верхней грани

величина погрешности будет определяться относительной высотой h^* (рис. 2).

Методы

Для определения величины погрешности формулы (1) выполнены расчеты серии моделей с различным соотношением высоты к пролету в рамках плоской задачи теории упругости (плоское напряженное состояние) с помощью метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в программном комплексе SCAD, в котором применяются изопараметрические конечные элементы.

Отношение высоты к пролету в моделях изменялось в пределах $h^* = \frac{4}{20} \div \frac{8,5}{20}$, толщина $b = h$. Разбивочная сетка принята из прямоугольных конечных элементов, по длине образца принято 110 элементов, по высоте — от 26 до 56 в зависимости от h^* . Отношение сторон конечных элементов составляет 0,75...1,0. Закрепление образца моделировалось постановкой связей по нижней грани: по вертикали на расстоянии 1 см от торцов, по горизонтали — одной связью, устанавливаемой в одном из закрепленных по горизонтали узлов (рис. 3). Модуль упругости материала принят равным 30 000 МПа, коэффициент Пуассона — 0,3. В результате расчетов получены компоненты напряженного состояния для 10 схем, в которых высота увеличивается с шагом 0,5 см от 4 до 8,5 см.

Результаты

Рассмотрено два варианта загрузки: сосредоточенной силой 1 кН в узле грузо-

вого участка по центру верхней грани и распределенной линейно кусочно-непрерывной нагрузкой на центральном участке a длиной 1,2 см с приложением в пяти узлах сосредоточенных сил P_i : 111 Н, 222 Н, 334 Н, 222 Н, 111 Н (см. рис. 3).

Для этих вариантов загрузжений значения нормальных краевых напряжений σ_x в нижней контрольной точке у моделей с разной относительной высотой h^* отличаются на величины 0,2–0,6 %, что определяет незначительную чувствительность к схеме передачи нагрузки на верхней грани. Приближенность результатов расчета в рамках конечноэлементной модели [15–18] контролировалась по величине нормальных напряжений σ_x на участках, свободных от нагрузки вертикальных граней рассматриваемой области длиной c , удаленных от опор на расстояние, равное диаметру опорного стержня $d = 15$ мм. Максимальное ненулевое значение напряжений на боковой грани сравнивалось с растягивающим напряжением в контрольной точке рассчитываемой области. Решение считалось точным, если величина напряжений σ_x на вертикальной грани не превосходила 0,5 % от напряжений в контрольной точке. Для расчетной схемы с высотой $h = 4$ см погрешность σ_x составила 0,2 %, для $h = 8,5$ см — 0,4 %.

Во всех расчетных моделях значение напряжений получается меньше, чем вычисленное по формуле (1), что приводит к переоценке прочности материала на растяжение по полученным результатам испытаний стандартных образцов. Величина погрешности относительно решения задачи теории упругости следующая: для невысоких балочек, высотой 4 см, напряжения оказываются меньше на 3,6 %, для балочек высотой 8,5 см — 7,2 %.

Для каждой схемы вычислен коэффициент погрешности величины контролируемых напряжений по формуле $k_h = \frac{\sigma_x}{\sigma}$, где σ_x — нормальные растягивающие напряжения в нижней контрольной точке образца, полученные в рамках решения задачи теории упругости; σ — величина этих же напряжений, получаемая по формуле (1). Зависимость данного коэффициента от относительной высоты h^* представлена на графике, где точками показаны результаты вычислений для различных схем (рис. 4).

Обсуждение и выводы

На данном графике видно, что коэффициент k_h достаточно точно может быть определен по линейной зависимости от относительной высоты образца h^* . Линейная аппроксимация полученных числовых данных напряжений по методу наименьших квадра-

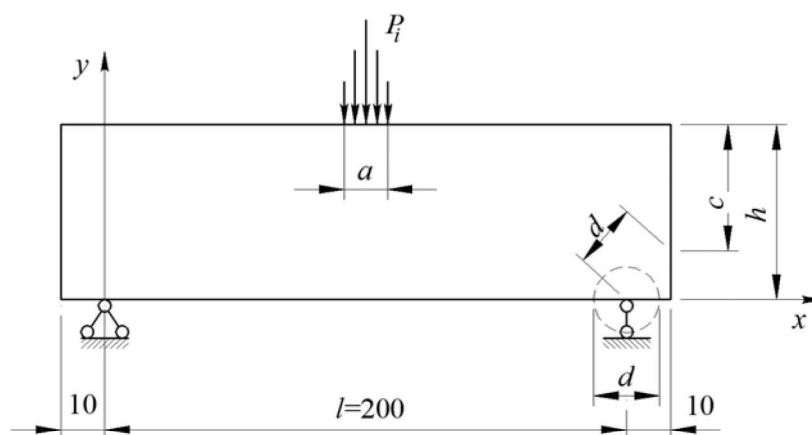


Рис. 3. Расчетная схема

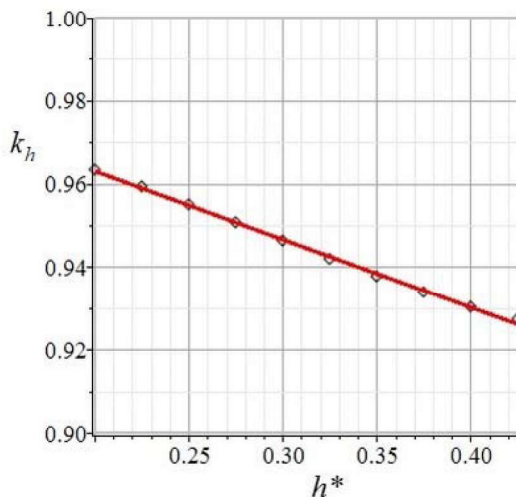


Рис. 4. Зависимость коэффициента k_h от относительной высоты образца h^*

тов (см. рис. 4, сплошная линия) с точностью до второй значащей цифры представляется функцией

$$k_h = 1 - 0,16h^*. \quad (2)$$

Во избежание переоценки прочности асфальтобетонных образцов для коррекции систематической погрешности значений краевых напряжений, вычисляемых по (1), их можно уточнить введением поправочного коэффициента k_h (см. (2)). В этом случае формула (1) примет вид:

$$R_{изг} = k_h \frac{3Pl}{2bh^2} = \frac{3P(1-0,16h^*)}{2bh^2}, \quad (3)$$

где h^* — относительная высота образца, равная h/l .

Отметим, что введение поправочного коэффициента направлено на уточнение результатов вычисления краевых растягивающих напряжений по формуле (1), обусловлено несоответствием геометрических параметров стандартных образцов бруса как одномерному объекту задачи сопротивления материалов и не касается действительного распределения напряжений, получаемых с учетом неупругих деформаций асфальтобетона. Для определения действительных прочностных характеристик асфальтобетона необходимо получать соответствующие

зависимости по результатам специальных исследований, включающих учет неупругих деформаций, скорости нагружения, конструктивной нелинейности [4, 19, 20, 21] и других особенностей работы материала образцов подобно тому, как это сделано для бетонов на минеральном вяжущем⁴ [22]. Получаемые результаты поправочных коэффициентов при этом могут содержать в том числе учет и отклонения распределения напряжений от линейного закона, связанного с высотой образцов.

Библиографический список

1. Leon L. P., Gay D., Simpson N., Edwin S. Stress-Strain and Failure Modes of Asphalt Concrete in Compression Due to Geometrical Changes // 16th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Innovation in Education and Inclusion", 18–20 July 2018, Lima, Peru. 8 p.
2. Leon L. P., Charles R., Simpson N. Stress-strain behaviour of asphalt concrete in compression // Procedia Structural Integrity. 2016. Vol. 2. Pp. 2913–2920. (21st European Conference on Fracture, ECF21, 20–24 June 2016, Catania, Italy.)
3. Косенко Н. В., Горячев М. Г., Лугов С. В., Мишина Д. Ю. Обоснование расчетных характеристик асфальтобетонов по ГОСТ Р 58406.2–2020 при проектировании дорожных одежд на растяжение при изгибе // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. 2022. № 2 (32). URL: <https://ores.su/ru/journals/avtomobil-doroga-infrastruktura>
4. Лантев М. Ю., Адамов А. А. Моделирование процессов деформирования полимерных композиционных материалов на основе тканого препрега при испытаниях на изгиб и межслоевой сдвиг методом короткой балки // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 3. С. 264–272.
5. Ефимов В. П. Бразильская прочность на растяжение и ее связь с прочностью на разрыв // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2021. Т. 8, № 1. С. 66–72.
6. Молотников В. Я., Молотникова А. А. Замечания к бразильскому методу исследования прочности хрупких материалов на растяжение // Вестник Донского гос. техн. ун-та. 2014. Т. 14, № 4 (79). С. 30–38.
7. Hafiang Wen. Fatigue Performance Evaluation of WesTrack Asphalt Mixtures Based on Viscoelastic Analysis

⁴ ГОСТ 10180–2012. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам.

of Indirect Tensile Test: PhD dissertation. Department of civil engineering Raleigh, North Carolina, 2001. 157 p.

8. Qian G., Yang H., Li X., Yu H., Gong X. and Zhou H. A Unified Strength Model of Asphalt Mixture Considering Temperature Effect // *Front. Mater.* 2021. Vol. 8. 754187. DOI 10.3389/fmats.2021.754187.

9. Farag Khodary Moalla Hamed. Evaluation of Fatigue Resistance for Modified Asphalt Concrete Mixtures Based on Dissipated Energy Concept // *Technische Universität Darmstadt*. 2010. 156 p.

10. Braham A. F., Underwood B. S. (eds.). State of the art and practice in fatigue cracking and evaluation of asphalt pavements. Association of Asphalt Paving Technologists, Version 1.0 // *andrewbraham.com*: Lino Lakes, MN. 2016. 151 p. URL: http://www.andrewbraham.com/AAPT_Fatigue_2016.pdf (дата обращения: 11.01.2024).

11. Uzan J. Uniaxial Tension Fatigue Test of Asphalt Concrete — An Improved Framework // *Journal of Testing and Evaluation*. 2022. Vol. 50, No. 5. 16 p. URL: <https://www.astm.org/jte20220048.html> (дата обращения: 11.01.2024).

12. Ефимов В. П. Поведение нехрупких горных пород при изгибе // *Интерэкспо Гео-Сибирь*. 2021. Т. 2, № 3. С. 206–212.

13. Матросов А. В. Численно-аналитический алгоритм решения задач плоской деформации линейно-упругих тел сложной конфигурации // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2008. № 3. С. 70–84.

14. Голоскоков Д. П., Данилюк В. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния камеры судоходного шлюза с помощью полиномов // *Журнал университета водных коммуникаций*. 2011. № 4. С. 16–21.

15. Ширунов Г. Н. Точные решения задачи теории упругости для проверки практической сходимости конечно-элементных моделей // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 6 (41). С. 53–57.

16. Матросов А. В., Улитин В. В. Сравнительный анализ численно-аналитического и конечно-элементного моделирования упругих систем Морские интеллектуальные технологии. 2010. № 1 (7). С. 49–54.

17. Shirunov G. N., Matrosov A. V., Sarvilin D. A. A rectangular prism under own weight: comparison of the method of initial functions and the finite element method // In: *Stability and Control Processes. Proceedings of the 4th International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov*. Cham, 2022. Pp. 829–836.

18. Ширунов Г. Н., Тугутов III. С., Ниджад А., Сарвилин Д. А. Сравнительный анализ сходимости объемных конечноэлементных моделей в задаче изгиба толстой изотропной плиты с заделанными боковыми

гранями // *Вестник гражданских инженеров*. 2016. № 5 (58). С. 86–95.

19. Игнатъев А. В., Бочков М. И., Курочкина И. В. Сравнительный анализ эффективности некоторых алгоритмов расчета систем с односторонними связями // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2019. № 11 (731). С. 87–98.

20. Пеклов П. Н., Тищенко В. А. Исследование напряженно-деформированного состояния пластинчатых полотен защитных устройств входов в фортификационные сооружения при динамических воздействиях // *Военный инженер*. 2018. № 1 (7). С. 45–52.

21. Левашов Г. М., Сиротюк В. В. Об определении предела прочности асфальтобетона на растяжение при изгибе // *Вестник СибАДИ*. 2011. № 4 (22). С. 23–26.

22. Берг О. Я., Щербаков Е. Н., Писанко Г. Н. Высокопрочный бетон / под ред. О. Я. Берга. М.: Стройиздат, 1971. 208 с.

References

1. Leon L. P., Gay D., Simpson N., Edwin S. Stress-strain and failure modes of asphalt concrete in compression due to geometrical changes. *Proceedings of the 16-th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: "Innovation in Education and Inclusion"*, July 18–20, 2018, Lima, Peru, 8 p.

2. Leon L. P., Charles R., Simpson N. Stress-strain behaviour of asphalt concrete in compression. *Procedia Structural Integrity*. 2016, vol. 2, pp. 2913–2920. (Proceedings of the 21-st European Conference on Fracture, ECF21, 20–24 June 2016, Catania, Italy.)

3. Kosenko N. V., Goryachev M. G., Lugov S. V., Mishina D. Yu. *Obosnovanie raschyotnykh kharakteristik asfal'tobetonov po GOST R 58406.2–2020 pri proektirovani dorozhnykh odezhd na rastyazhenie pri izgibe* [Justification of the design characteristics of asphalt concrete according to GOST R 58406.2–2020 for designing roadways in bending tension]. *Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura – Automobile. Road. Infrastructure*, 2022, no. 2 (32). 4. Available at: <https://ores.ru/journals/avtomobil-doroga-infrastruktura>

4. Laptev M. Yu., Adamov A. A. *Modelirovanie protsessov deformirovaniya polimernykh kompozitsionnykh materialov na osnove tkanogo preprega pri ispytaniyakh na izgib i mezhsloevoy sdvig metodom korotkoy balki* [Modeling of processes of deformation of polymer composite materials on the basis of woven prepreg at tests on bending and interlayer shear by the method of short beam]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Mechanics of Continuous Media*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 264–272.

5. Efimov V. P. *Brazil'skaya prochnost' na rastyazhenie i ee svyaz' s prochnost'yu na razryv* [Brazilian tensile strength and its relation to tensile strength]. *Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornykh nauk – Fundamental and Applied Issues of Mining Sciences*, 2021, vol. 8, no. 1, pp. 66–72.
6. Molotnikov V. Ya., Molotnikova A. A. *Zamechaniya k brazil'skomu metodu issledovaniya prochnosti khrupkikh materialov na rastyazhenie* [Some remarks to the Brazilian method of research of tensile strength of brittle materials]. *Vestnik Donskogo gos. tekhn. un-ta – Bulletin of the Don State Technical University*, 2014, vol. 14, no. 4 (79), pp. 30–38.
7. Hafiang Wen. *Fatigue performance evaluation of westrack asphalt mixtures based on viscoelastic analysis of indirect tensile test: PhD dissertation*. Department of Civil Engineering, Raleigh, North Carolina, 2001, 157 p.
8. Qian G., et al. Unified Strength Model of Asphalt Mixture Considering Temperature Effect. *Front. Mater.*, 2021, vol. 8, 754187. DOI: 10.3389/fmats.2021.754187.
9. Farag Khodary Moalla Hamed. *Evaluation of fatigue resistance for modified asphalt concrete mixtures based on dissipated energy concept*. Technische Universität Darmstadt Publ., 2010, 156 p.
10. Braham A. F., Underwood B. S. (eds.). *State of the art and practice in fatigue cracking and evaluation of asphalt pavements*. Association of Asphalt Paving Technologists Publ., Version 1.0. Lino Lakes, MN, 2016, 151 p. Available at: http://www.andrewbraham.com/AAPT_Fatigue_2016.pdf (accessed: 11.01.2024)
11. Uzan J. Uniaxial tension fatigue test of asphalt concrete — An improved framework. *Journal of Testing and Evaluation*, 2022, vol. 50, no. 5. 16 p. Available at: <https://www.astm.org/jte20220048.html> (accessed: 11.01.2024)
12. Efimov V. P. *Povedenie nekhрупkikh gornykh porod pri izgibe* [Behavior of non-brittle rocks under bending]. *Interespo Geo-Sibir' – Interexpo GEO-Siberia*, 2021, vol. 2, no. 3, pp. 206–212.
13. Matrosov A. V. *Chislenno-analiticheskiy algoritm resheniya zadach ploskoy deformatsii lineynoy-uprugikh tel slozhnoy konfiguratsii* [Numerical-analytical algorithm for solving problems of plane deformation of linear-elastic bodies of complex configuration]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protssy upravleniya – Bulletin of St. Petersburg University. Applied Mathematics. Informatics. Control Processes*, 2008, no. 3, pp. 70–84.
14. Goloskokov D. P., Danilyuk V. A. *Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kamery sudokhodnogo shlyuza s pomoshch'yu polinomov* [Modeling of a stress-strain state of a chamber of a navigable sluice by means of polynomials]. *Zhurnal universiteta vodnykh kommunikatsiy – Journal of the University of Water Communications*, 2011, no. 4, pp. 16–21.
15. Shirunov G. N. *Tochnye resheniya zadachi teorii uprugosti dlya proverki prakticheskoy skhodimosti konechno-elementnykh modeley* [Exact solutions of the problem of elasticity theory for verification of practical convergence of finite element models]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 6 (41), pp. 53–57.
16. Matrosov A. V., Ulitin V. V. *Sravnitel'nyy analiz chislenno-analiticheskogo i konechno-elementnogo modelirovaniya uprugikh sistem* [Comparative analysis of numerical-analytical and finite-element modeling of elastic systems]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intelligent Technologies*, 2010, no. 1 (7), pp. 49–54.
17. Shirunov G. N., Matrosov A. V., Sarvilin D. A. *Rectangular prism under own weight: comparison of the method of initial functions and the finite element method*. In: *Stability and Control Processes*. Proceedings of the 4-th International conference dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov. Cham, 2022, pp. 829–836.
18. Shirunov G. N., Tugutov Sh. S., Nidzhad A., Sarvilin D. A. *Sravnitel'nyy analiz skhodimosti ob'emnykh konchnoelementnykh modeley v zadache izgiba tolstoy izotropnoy plity s zadelannymi bokovymi granyami* [Comparative analysis of convergence of volumetric cone-element models in the problem of bending of a thick isotropic plate with embedded side faces]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 5 (58), pp. 86–95.
19. Ignat'ev A. V., Bochkov M. I., Kurochkina I. V. *Sravnitel'nyy analiz effektivnosti nekotorykh algoritmov rascheta sistem s odносторонними svyazyami* [Comparative analysis of efficiency of some algorithms for calculation of systems with one-sided connections]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo – Bulletin of Higher Schools*, 2019, no. 11 (731), pp. 87–98.
20. Peklov P. N., Tishchenko V. A. *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plastinchatykh poloten zashchitnykh ustroystv vkhodov v fortifikatsionnye sooruzheniya pri dinamicheskikh vozdeystviyakh* [Investigation of the stress-strain state of plate webs of protective devices of entrances to fortification structures under dynamic impacts]. *Voenniy inzhener – Military Engineer*, 2018, no. 1 (7), pp. 45–52.
21. Levashov G. M., Sirotiyuk V. V. *Ob opredelenii predela prochnosti asfal'tobetona na rastyazhenie pri izgibe* [On the determination of the tensile strength limit of asphalt concrete in bending]. *Vestnik SibADI – Bulletin of SibADI*, 2011, no. 4 (22), pp. 23–26.
22. Berg O. Ya., Shcherbakov E. N., Pisanko G. N. *Vysokoprochniy beton* [High-strength concrete]. Ed. by Berg O. Ya. Moscow, Stroyizdat Publ., 1971, 208 p.