

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

APPLICATION OF GENERALIZED FUNCTIONS IN DETERMINING DISPLACEMENTS IN BEAMS BY THE METHOD OF INITIAL PARAMETERS

Метод начальных параметров является широко распространенным в строительной механике. Рассмотрена краевая задача линейного дифференциального уравнения с граничными условиями на примере шарнирно опертой балки. Приводятся некоторые недостатки этого метода. Для каждого сечения балки, где определяются перемещения, формируются интегральные выражения, что может быть неудобным и требует дополнительных усилий. Показано применение обобщенных функций при записи соответствующих выражений, что позволяет учесть различные условия и варианты воздействия на балку. Процедура интегрирования дифференциального уравнения, описывающего изогнутую ось балки, становится более последовательной и понятной.

Ключевые слова: метод начальных параметров, краевая задача, обобщенные функции.

The method of initial parameters described in the article is widely used in structural mechanics. There has been developed a boundary value problem of a linear differential equation with boundary conditions which is analyzed using the example of a pivotally supported beam. Some inconveniences of this method are demonstrated. Integral expressions are generated for each beam section where displacements are determined, which can be inconvenient and requires additional efforts. The application of generalized functions in writing the corresponding expressions is shown, which allows taking into account various conditions and options for influencing the beam. The procedure for integrating the differential equation describing the curved axis of the beam becomes more consistent and understandable.

Keywords: initial parameters method, boundary value problem, generalized functions.

Введение

Метод начальных параметров широко применяется для анализа изогнутой оси балок [1]. Проблема этого метода состоит в том, что он имеет некоторые неудобства. Для каждого сечения балки, где определяются перемещения, необходимо формировать интегральные выражения, что требует дополнительных усилий. Кроме того, интегральные выражения в данной записи не являются математически строгими. Для кор-

ректного описания процесса интегрирования требуются громоздкие математические выкладки, которые могут отвлекать от сути задачи и вызывать сомнения относительно достоверности полученных результатов.

Чтобы расширить возможности учета внешней нагрузки на балку в различных сочетаниях, можно применять обобщенные функции при записи соответствующих выражений [2]. Обобщенные функции позволяют учесть более сложные условия

нагрузки на балку, включая сосредоточенные силы, моменты и распределенные нагрузки. Применение обобщенных функций и более последовательной процедуры интегрирования в методе начальных параметров способствует улучшению точности и надежности получаемых результатов, что делает метод более универсальным и применимым для широкого спектра задач.

Методы исследования

Большинство методов расчета задач строительной механики основано на определении перемещений в заданных сечениях элементов конструкций, например, решение статически неопределенных задач методом сил.

Для определения перемещений в балках используется дифференциальное уравнение ее изогнутой оси. В случае балки постоянного поперечного сечения $E(x)J(x) = EJ = \text{const}$ это уравнение имеет вид

$$EJy^{IV}(x) = q(x), \tag{1}$$

где $q(x)$ — действующая на балку внешняя нагрузка; E — модуль упругости балки; J — момент инерции поперечного сечения балки [3, 4].

Например, на рис. 1 показана балка пролетом l , шарнирно опертая на двух опорах, находящаяся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q_0 ($q(x) = q_0$).

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = 0: & y(0) = 0; EJy''(0) = M(0) = 0; \\ x = l: & y(l) = 0; EJy''(l) = M(l) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

То есть на опорах A и B :

- прогибы $y(0) = 0; y(l) = 0$;
- изгибающие моменты $M(0) = 0; M(l) = 0$.

Таким образом, имеем краевую задачу для линейного дифференциального уравнения (1) с граничными условиями (2). Последовательно интегрируя четыре раза уравнение (1), получим

$$EJy^{IV}(x) = q_0; EJy'''(x) = q_0x + c_1;$$

$$EJy''(x) = q_0 \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2;$$

$$EJy'(x) = q_0 \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3;$$

$$EJy(x) = q_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 находим из граничных условий. Имеем

$$x = 0; y(0) = c_4 = 0; y''(0) = c_2 = 0;$$

$$x = l: EJy''(l) = q_0 \frac{l^2}{2} + c_1l = 0 \rightarrow c_1 = -q_0 \frac{l}{2};$$

$$EJy(l) = q_0 \frac{l^4}{24} - q_0 \frac{l}{2} \frac{l^3}{6} + c_3l = 0 \rightarrow c_3 = q_0 \frac{l^3}{24}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} EJy'(x) &= EJ\varphi(x) = \\ &= q_0 \frac{x^3}{6} - q_0 \frac{l}{4}x^2 + q_0 \frac{l^3}{24} = \frac{q_0l^3}{24} \left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right], \\ EJy(x) &= q_0 \frac{x^4}{24} - q_0 \frac{l}{12}x^3 + q_0 \frac{l^3}{24}x = \\ &= \frac{q_0l^3}{24} \left[4\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

С помощью выражений (3) определяют углы поворота $\varphi(x)$ и прогиб $y(x)$ в любом сечении балки. Например, при $x = l/2$, то есть в середине пролета, $EJ\varphi(x) = 0$; $EJy(x) = (5q_0l^4 / 24) \cdot 16$.

Описанный выше прием нахождения перемещений называется методом непосредственного интегрирования [5–9]. Им удобно пользоваться в случае однопролетной балки при действии непрерывно распределенной нагрузки $q(x)$, действующей на всем пролете, то есть когда балка имеет один участок. В случае двух и более участков при использовании метода непосредственного интегрирования необходимо записывать краевую задачу (1), (2) для каждого участка. Полученные для каждого участка решения затем на

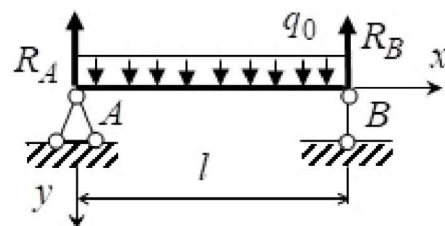


Рис. 1. Шарнирно опертая балка на двух опорах

границе участков «склеиваются», что исключает его практическое применение для двух и более участков.

Поясним понятие «участок». Границами участков являются точки приложения сосредоточенных сил P_i , изгибающих моментов M_i , начало и конец действия распределенных нагрузок q_i . На рис. 2, 3 приведены примеры нагрузок, которые разбивают балку соответственно на два и три участка. Отметим, что возможны любые комбинации нагрузок, показанных на рис. 2, 3, но виды нормативных нагрузок практически исчерпываются приведенными.

Для преодоления описанных выше недостатков на основе дифференциального уравнения (1) был создан метод начальных параметров, который нашел широкое распространение в практике определения перемещений в балках. Суть метода состоит в следующем. На рис. 4 изображена система координат XOY , ось балки с пролетом l с началом в точке O . На балку действуют сосредоточенные силы P_1, P_2, P_3 , изгибающий момент M_1 , равномерно распределенная нагрузка q_1 . На рис. 5 показаны их положительные на-

правления. Требуется определить угол поворота $\varphi(x)$ и прогиб $y(x)$ в заданном (фиксированном) сечении X .

Отметим, что сечение X фиксируется расстоянием от начала координат и расстоянием a_i, b_i, c_i от точек приложения внешней нагрузки. Иначе говоря, внешняя нагрузка задается не расстоянием от начала координат, а расстоянием от сечения X , в котором определяется перемещение. Такое задание положения сечения X существенно упрощает получение расчетных выражений метода начальных параметров, хотя на первый взгляд между ними нет никакой разницы.

Мысленно рассекаем балку в сечении X , отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие оставшейся левой (см. рис. 4). Действие отброшенной правой части заменяем изгибающим моментом M_x и поперечной силой Q_x . Из уравнения статики относительно точки X получаем следующее выражение для изгибающего момента M_x :

$$M_x = M_1 + P_1 b_1 + P_2 b_2 + q_1 c_1^2 / 2.$$

Используем запись уравнения (1) в виде (4):

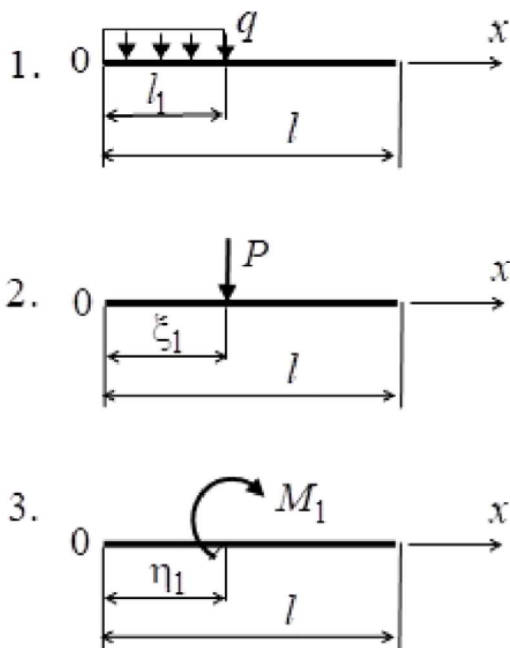


Рис. 2. Примеры нагрузок, которые разбивают балку на два участка

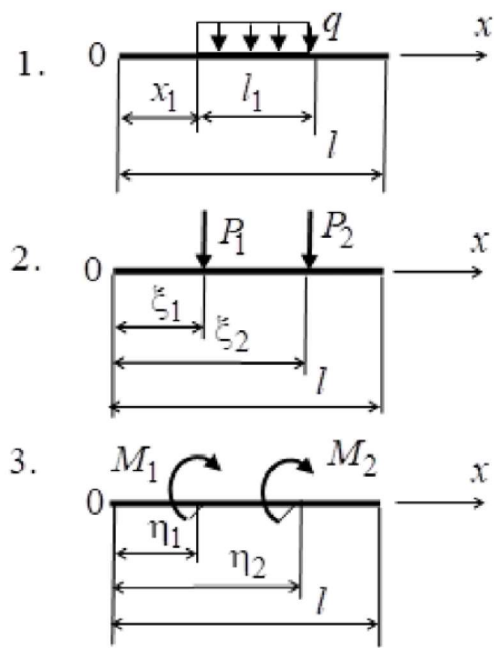


Рис. 3. Примеры нагрузок, которые разбивают балку на три участка

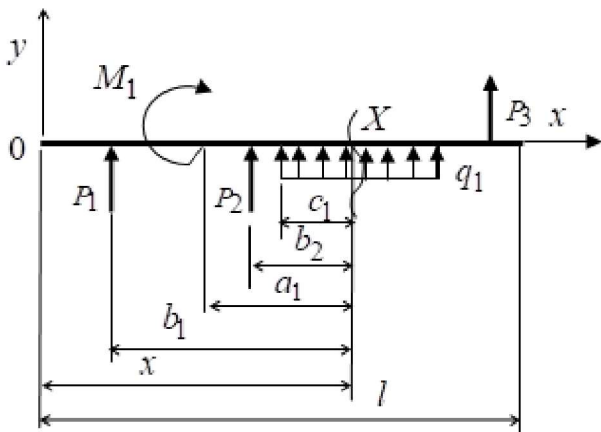


Рис. 4. Ось балки под действием внешней нагрузки

$$EJy''(x) = M_x = M_1 + P_1b_1 + P_2b_2 + q_1c_1^2/2. \quad (4)$$

Интегрируя (4) последовательно два раза, получим

$$EJy'(x) = EJ\varphi(x) = M_1a_1 + P_1 \frac{b_1^2}{2} + P_2 \frac{b_2^2}{2} + q_1 \frac{c_1^3}{6} + d_1;$$

$$EJy(x) = M_1 \frac{a_1^2}{2} + P_1 \frac{b_1^3}{6} + P_2 \frac{b_2^3}{6} + q_1 \frac{c_1^4}{24} + d_1x + d_2. \quad (5)$$

Постоянные интегрирования d_1, d_2 находим из граничных условий при $x = 0$. Имеем

$$EJ\varphi(0) = EJ\varphi_0 = d_1; \quad EJy(0) = EJy_0 = d_2. \quad (6)$$

Таким образом, d_1, d_2 — это угол поворота и прогиб балки в ее начальном сечении, что и дало название методу. Коэффициенты в знаменателе представим через факториал [10]. В окончательном виде выражение (5) записываем в виде

$$EJ\varphi(x) = EJ\varphi_0 + \sum M_i a_i + \sum P_i \frac{b_i^2}{2!} + \sum q_i \frac{c_i^3}{3!};$$

$$EJy(x) = EJ\varphi_0 x + EJy_0 + \sum M_i \frac{a_i^2}{2!} + \sum P_i \frac{b_i^3}{3!} + \sum q_i \frac{c_i^4}{4!}. \quad (7)$$

При использовании этого метода учитываются все силы, стоящие левее сечения X , и только они. Вычислим угол поворота $\theta(x)$ и прогиб $y(x)$ при $x = l/2$ для балки, изображенной на рис. 1. Имеем $R_A = R_B = ql/2, b_1 = l/2, c_1 = l/2, q_1 = -q$. Тогда при $x = l/2$

$$EJ\varphi(x) = EJ\varphi_0 + R_A \frac{l^2}{8} - q \frac{l^3}{48};$$

$$EJy(x) = EJ\theta_0 \frac{l}{2} + EJy_0 + R_A \frac{l^3}{48} - q \frac{l^4}{16 \cdot 24}. \quad (8)$$

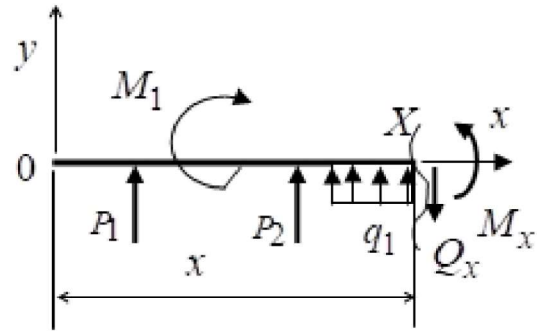


Рис. 5. Участок балки до сечения

Начальные параметры: $y_0 = 0$, так как прогиб на левой опоре отсутствует; φ_0 определяется из условия, что при $x = l$ прогиб равен нулю.

Имеем

$$EJy(l) = EJ\varphi_0 l + R_A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0.$$

Отсюда $EJ\varphi_0 = -ql^3/24$. Тогда из (8) при $x = l/2$

$$EJ\varphi(x) = -\frac{ql^3}{24} + \frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} = 0;$$

$$EJy(x) = -\frac{ql^4}{2 \cdot 24} + \frac{ql^4}{4 \cdot 24} - \frac{ql^4}{16 \cdot 24} = -\frac{5ql^4}{16 \cdot 24}. \quad (9)$$

Эти выражения совпадают с полученными ранее методом непосредственного интегрирования. Разница в знаке объясняется различным выбором направления оси y .

Описанный процесс получения выражений методом начальных параметров и его запись в виде (7) являются общепринятыми и в таком виде приводятся во всех учебных изданиях. Неудобство этого метода в такой редакции состоит в том, что для каждого сечения балки, в котором определяются перемещения, необходимо сформировать выражения (7).

Кроме этого, можно отметить отсутствие математической строгости при интегрировании выражений (4). Корректное описание процесса интегрирования выражений (4) связано с приведением громоздких математических выкладок, которые отвлекают от механического содержания задачи. Однако их отсутствие вызывает некоторые сомнения в достоверности полученного результата.

Указанных трудностей позволяет избежать использование обобщенных функций. Приведем некоторые сведения из их теории. Обобщенные функции являются расширением множества обычных функций. Это некоторые предельные образцы, они не являются функциями в обычном смысле слова, однако, определяя совокупность формальных операций над обобщенными функциями, удастся избежать затруднений, возникающих при использовании классических функций.

Для целей настоящей работы используются две обобщенные функции: дельта-функция $\delta(x-x_0)$ и функция Хевисайда $\theta(x-x_0)$ [11, 12].

Дельта-функция $\delta(x-x_0)$ представляет собой интенсивность единичного воздействия, приложенного в точке $x = x_0$. То есть она равна нулю на всей числовой оси, за исключением точки $x = x_0$, в которой она равна бесконечности, так чтобы

$$\int \delta(x-x_0) dx = 1. \quad (10)$$

Последовательности, предельным элементом которых является дельта-функция, называют дельтообразными. На рис. 6 изображена нормированная локальная последовательность, на рис. 7 — дельтообразная последовательность непрерывных функций (11), а на рис. 8 — производная последней.

$$\Phi_m(x) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1+(mx)^2}; \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m(x) dx = 1; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Свойства дельта-функции:

$$1. f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0),$$

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x);$$

$$2. \int \delta(x-x_0)\varphi(x) dx = \varphi(x_0);$$

$$3. \int [f(x)\delta(x-x_0)]\varphi(x) dx = \int [f(x_0)\delta(x-x_0)]\varphi(x) dx,$$

при $x_0 = 0$:

$$\int [f(x)\delta(x)]\varphi(x) dx = \int [f(0)\delta(x)]\varphi(x) dx;$$

$$4. \int \delta'(x)\varphi(x) dx = -\varphi'(0);$$

$$5. \int \delta'(x-x_0)\varphi(x) dx = -\varphi'(x_0);$$

$$6. \int \delta^{(n)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Продифференцируем выражения из свойства 1. Имеем

$$[f(x)\delta(x)]' = f'(x)\delta(x) + f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x);$$

$$f'(0)\delta(x) + f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x).$$

Полагаем $f(x) = x$. Имеем

$f'(0) = 1, f(0) = 0, f(x) = x$. Тогда получим свойство 7:

$$7. x\delta'(x) = -\delta(x); \quad \delta'(x) = -\frac{1}{x}\delta(x).$$

(Соответствующие графики производной дельтообразной последовательности (11) показаны на рис. 8.).

$$8. \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{n!}{x^n} \delta(x).$$

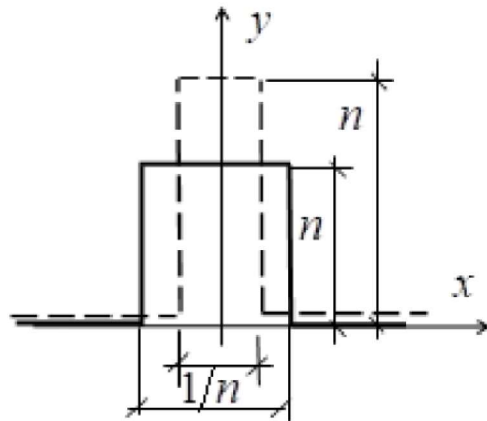


Рис. 6. Нормированная локальная последовательность

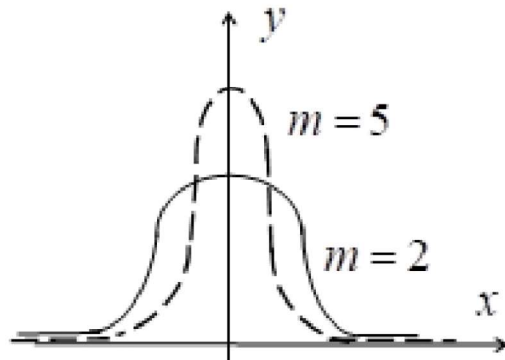


Рис. 7. Дельтообразная последовательность $\Phi_m(x)$

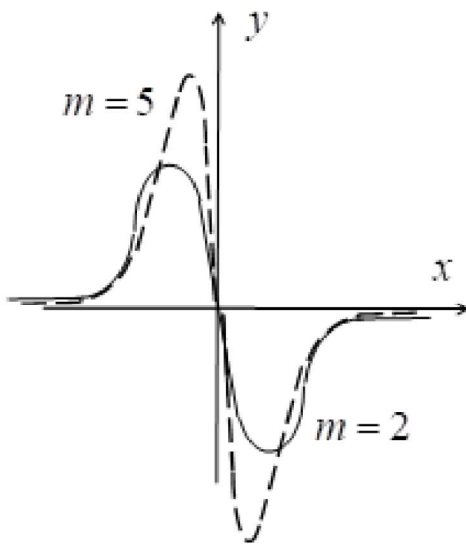


Рис. 8. Производная дельтообразной последовательности $\Phi_m(x)$

Единичная функция Хевисайда $\theta(x)$ задается в виде

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}, \theta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0 \\ 1 & \text{при } x > x_0 \end{cases}. \quad (13)$$

Графики функции Хевисайда приведены на рис. 9, 10.

Функция Хевисайда в точке $x = 0$ ($x = x_0$) недифференцируема в обычном смысле и связана с дельта-функцией следующими соотношениями [13–15]:

1. $\theta'(x) = \delta(x)$, $\theta'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$;
2. $\int \theta'(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$; $\int \theta'(x-x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$;
3. $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi)dt$; $\theta(x-x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi-x_0)d\xi$;
4. $\int_{-\infty}^x f(\xi)\delta(\xi-x_0)d\xi = f(x_0)\theta(x-x_0)$.

С единичной функцией $\theta(x)$ связана функция x_+^n со следующими свойствами

$$x_+ = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}; x_+ = \int_{-\infty}^x \theta(\xi)d\xi = x\theta(x);$$

$$x_+^n = x^n\theta(x); d^k x_+^n / dx^k = (n!/(n-k)!)x_+^{n-k}.$$

Результаты

С помощью введенных в рассмотрение обобщенных функций представим выражение для нагрузки $q(x)$ в правой части уравнения (1) в общем виде. На первом этапе за-

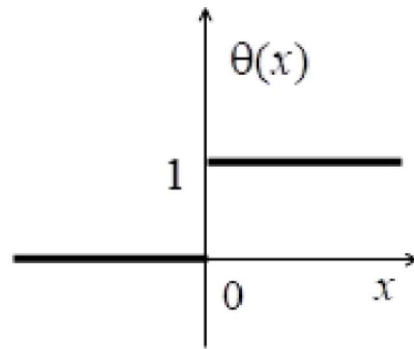


Рис. 9. Единичная функция Хевисайда $\theta(x)$

пишем выражения для $q(x)$, приведенных на рис. 2, 3:

- $q(x) = q_1 [\theta(x) - \theta(x-l_1)]$;
- $q(x) = q_1 [\theta(x-x_1) - \theta(x-(x_1+l_1))]$;
- $q(x) = P_1\delta(x-\xi_1) + P_2\delta(x-\xi_2)$;
- $q(x) = M_1\delta'(x-\eta_1) + M_2\delta'(x-\eta_2)$.

Пусть на балку действует нагрузка $q(x)$ общего вида:

$$q(x) = \sum_{i=1} q_i [\theta(x-x_i) - \theta(x-(x_i+l_i))] + \sum_{i=1} P_i\delta(x-\xi_i) + \sum_{i=1} M_i\delta'(x-\eta_i).$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (1)

$$EJy^{IV}(x) = q(x).$$

Интегрируем его. Для упрощения записи опускаем значок суммы. Имеем

$$EJy^{III}(x) = q_i [(x-x_i)\theta(x-x_i) - (x-(x_i+l_i))\theta(x-(x_i+l_i))] + P_i\theta(x-\xi_i) + M_i\delta(x-\eta_i) + A_1.$$

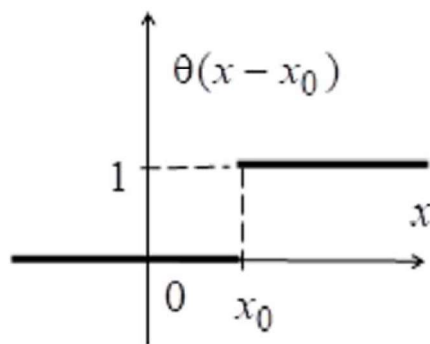


Рис. 10. Единичная функция Хевисайда $\theta(x)$ (при $x = x_0$)

Здесь учтено

$$\int_0^x \theta(x-x_i) dx = (x-x_i)\theta(x-x_i);$$

$$\int_0^x \delta(x-\xi_i) dx = \theta(x-\xi_i);$$

$$\int_0^x \delta'(x-\eta_i) dx = \delta(x-\eta_i);$$

A_1 — постоянная интегрирования.

Дальнейшее интегрирование дает:

$$EJy''(x) =$$

$$= q_i \left[\frac{(x-x_i)^2}{2} \theta(x-x_i) - \frac{(x-(x_i+l_i))^2}{2} \theta(x-(x_i+l_i)) \right] +$$

$$+ P_i(x-\xi_i)\theta(x-\xi_i) + M_i\theta(x-\eta_i) + A_1x + A_2;$$

$$EJy'(x) = EJ\varphi(x) =$$

$$= q_i \left[\frac{(x-x_i)^3}{3!} \theta(x-x_i) - \frac{(x-(x_i+l_i))^3}{3!} \theta(x-(x_i+l_i)) \right] +$$

$$+ P_i \frac{(x-\xi_i)^2}{2} \theta(x-\xi_i) +$$

$$+ M_i(x-\eta_i)\theta(x-\eta_i) + A_1 \frac{x^2}{2} + A_2x + A_3;$$

$$EJy(x) =$$

$$= q_i \left[\frac{(x-x_i)^4}{4!} \theta(x-x_i) - \frac{(x-(x_i+l_i))^4}{4!} \theta(x-(x_i+l_i)) \right] +$$

$$+ P_i \frac{(x-\xi_i)^3}{3!} \theta(x-\xi_i) +$$

$$+ M_i \frac{(x-\eta_i)^2}{2!} \theta(x-\eta_i) + A_1 \frac{x^3}{3!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3x + A_4. \quad (14)$$

Постоянные интегрирования определяются из условий в крайнем левом сечении балки, т. е. при $x = 0$. Имеем при $x = 0$

$$EJy(0) = EJy_0 = A_4; EJy'(0) = EJ\varphi_0 = A_3;$$

$$EJy''(0) = M_0; EJy'''(0) = Q_0.$$

Используя следующие обозначения:

$(x-x_i) = c_i; (x-\xi_i) = b_i; (x-\eta_i) = a_i; (x-(x_i+l_i)) = d_i$, получим запись выражения в виде (7).

Выводы

Применение обобщенных функций при записи выражений для внешней нагрузки $q(x)$,

действующей на балку, расширяет возможности для их учета в различных сочетаниях.

Процедура интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки с математической точки зрения становится более последовательной и ясной при использовании обобщенных функций.

При численной реализации данный метод дает более быструю сходимость (на 15 %). Это означает, что расчеты могут быть выполнены быстрее и с меньшими вычислительными затратами, что является преимуществом при проектировании конструкций.

Данная методика обобщенных функций также может применяться для анализа и расчета балок, позволяя учесть различные реальные условия эксплуатации. Однако для ее использования необходимы определенные знания о математическом аппарате и принципах работы с функциями.

Библиографический список

1. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989. 624 с.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. 2-е изд., стер. М.: Физматлит, 2004. 398 с.
3. Горев В. В. [и др.]. Элементы конструкций / под ред. В. В. Горева // Металлические конструкции. В 3 т. 3-е изд., стер. М.: Высшая школа, 2004. Т. 1. 551 с.
4. Кузнецов О. Р., Губарева Н. В. Основы расчетов на прочность конструкций. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 2002. 78 с.
5. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. 2-е изд., доп. и перераб. М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2005. 425 с.
6. Каган-Розенцвейг Л. М. Об одном удивительном свойстве упрощенного уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 1 (78). С. 107–110.
7. Губарева Н. В. Некоторые аспекты использования вероятностных методов расчета элементов механических систем // Наука и образование: достижения и перспективы: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 28 мая 2021 г. Саратов: ООО «Амирит», 2021. С. 27–39.
8. Моисеев В. В. Механика. Модуль «Сопротивление материалов». Южно-Сахалинск: СахГУ, 2020. 184 с.

9. Кожаринова Л. В. Основы теории упругости и пластичности. М.: АСВ, 2010. 136 с.

10. Жилкин В. А. Модификация метода начальных параметров // Вестник Челябинской государственной агроинженерной академии. 2014. Т. 67, № 1. С. 34–40.

11. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 1. С. 1–189.

12. Попова Е. М., Чигирёва О. Ю. Методические особенности изложения темы «Обобщенные функции. Обобщенные производные. Дельта-функция Дирака» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2018. № 7. С. 54–62.

13. Гук К. О., Мыльцина О. А. Метод решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде функции Хевисайда // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 3 (51). С. 41–47.

14. Губарева Н. В. Интегральные операторы с разрывным ядром и разложения по собственным функциям этих операторов: автореф. выпускной квалификационной работы магистра. Саратов, 2016. 14 с.

15. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.

References

1. Darkov A. V., Shpiro G. S. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of Materials]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1989, 624 p.

2. Vladimirov V. S., Zharinov V. V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. 2-nd ed., revised. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 398 p.

3. Gorev V. V., et al. *Elementy konstruksiy* [Elements of Structures]. Ed. by Gorev V. V. *Metallicheskie konstruksii* [Metal constructions]. In 3 vols. 3-rd ed., revised. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2004, vol. 1, 551 p.

4. Kuznetsov O. R., Gubareva N. V. *Osnovy raschetov na prochnost' konstruksiy* [Fundamentals of strength calculations for structures]. Saratov, Saratovskiy gos. tekhn. un-t Publ., 2002, 78 p.

5. Il'in V. P., Karpov V. V., Maslennikov A. M. *Chislennyye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki* [Numerical methods for solving problems of structural mechanics]. 2-nd ed., revised. Moscow, ASV; St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2005, 425 p.

6. Kagan-Rozentsveyg L. M. *Ob odnom udivitel'nom svoystve uproshchennogo uravneniya izgiba* [About one surprising property of the simplified bending equation]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 1 (78), pp. 107–110.

7. Gubareva N. V. *Nekotorye aspekty ispol'zovaniya veroyatnostnykh metodov raschyota elementov mekhanicheskikh sistem* [Some aspects of using probabilistic methods of calculation of elements of mechanical systems]. *Trudy IV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Saratov, 28 maya 2021 g. «Nauka i obrazovanie: dostizheniya i perspektivy»* [Proceedings of the IV Int. sci.-pract. conf. Saratov, May 28, 2021 «Science and education: achievements and prospects»]. Saratov, Amirit Publ., 2021, pp. 27–39.

8. Moiseev V. V. *Mekhanika. Modul' «Soprotivlenie materialov»* [Mechanics. Module “Resistance of materials”]. Yuzhno-Sakhalinsk, SakhGU Publ., 2020, 184 p.

9. Kozharinova L. V. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, ASV Publ., 2010, 136 p.

10. Zhilkin V. A. *Modifikatsiya metoda nachal'nykh parametrov* [Modification of the method of initial parameters]. *Vestnik Chelyabinskoy gosudarstvennoy agroinzhenernoy akademii – Bulletin of Chelyabinsk State Agroengineering Academy*, 2014, vol. 67, no. 1, pp. 34–40.

11. Soldatov A. P. *Singulyarnyye integral'nyye operatory i ellipticheskie kraevyye zadachi* [Singular integral operators and elliptic boundary value problems]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya – Modern Mathematics. Fundamental directions*, 2017, vol. 63, no. 1, pp. 1–189.

12. Popova E. M., Chigiryova O. Yu. *Metodicheskie osobennosti izlozheniya temy «Obobshchennyye funktsii. Obobshchennyye proizvodnyye. Del'ta-funktsiya Diraka»* [Methodological features of the topic “Generalized functions. Generalized derivatives. Dirac’s delta-function”]. *Nauchno-metodicheskiy elektronniy zhurnal «Koncept» – Scientific-methodical electronic journal “Concept”*, 2018, no. 7, pp. 54–62.

13. Guk K. O., Myl'tsina O. A. *Metod resheniya differentsial'nykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami v vide funktsii Khevisayda* [Method for solving differential equations with variable coefficients in the form of Heaviside step function]. *Trudy MFTI – Proceedings of MFTI*, 2021, vol. 13, no. 3 (51), pp. 41–47.

14. Gubareva N. V. *Integral'nyye operatory s razryvnym yadrom i razlozheniya po sobstvennym funktsiyam etikh operatorov: avto-ref. vypusknoy kvalifikatsionnoy raboty magistra* [Integral operators with a discontinuous kernel and decompositions on eigenfunctions of these operators. Author’s thesis for MSci qualification]. Saratov, 2016, 14 p.

15. Gorshkov A. G., Medvedskiy A. L., Rabinskiy L. N., Tarlakovskiy D. V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 472 p.