

УДК 620.164:620.179.1

© С. Н. Савин, д-р техн. наук, профессор

© А. О. Хегай, канд. техн. наук, доцент

© Ч. Д. Фан, аспирант

(Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: savinsn@gmail.com, lhegai@mail.ru,  
phanchungduc@gmail.com

© В. Ч. Ле, канд. техн. наук

(Данангский архитектурный университет,  
г. Дананг, Вьетнам)

E-mail: tronglv@dau.edu.vn

DOI 10.23968/1999-5571-2024-21-3-44-50

© S. N. Savin, Dr. Sci. Tech., Professor

© A. O. Khegai, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© Ch. D. Fan, post-graduate student

(Saint Petersburg State University  
of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russia)

E-mail: savinsn@gmail.com, lhegai@mail.  
ru, phanchungduc@gmail.com

© V. Tr. Le, PhD in Sci. Tech.

(Danang University of Architecture,  
Da Nang, Vietnam)

E-mail: tronglv@dau.edu.vn

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ДИАПАЗОНА ДЛИН ИЗГИБНЫХ ВОЛН ДЛЯ ОБСЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ ПЛИТНОГО ТИПА

### OPTIMIZATION OF BENDING WAVE LENGTH RANGE SELECTION FOR SLAB-TYPE STRUCTURE INSPECTION

Представлена точка зрения на проблему обследования строительной конструкции плитного типа с использованием изгибных волн в различных диапазонах частот. Проведя теоретические и экспериментальные исследования, авторы выбрали такой диапазон длин волн, который позволил получить наилучшую оценку физико-механических характеристик строительных материалов обследуемых конструкций. По достигнутым результатам выявлены реальные сравнительные данные о взаимосвязи скорости распространения изгибной волны и ее длины. Эти данные позволяют сделать более точный расчет по очевидному методу, но он пока не находит широкого применения в обследовании конструкций плитного типа.

**Ключевые слова:** изгибные волны, диапазон длин волн, теоретическое и экспериментальное исследование, конструкция плитного типа.

The paper presents a point of view on the problem of inspection of slab-type building structures using bending waves in different frequency ranges. Having made theoretical and experimental studies, the authors have chosen such a range of wavelengths, which allows obtaining the best assessment of physical and mechanical characteristics of building materials of the inspected structures. According to the results achieved, there have been revealed comparative data regarding the relationship between the bending wave propagation velocity and its length. These data allow carrying out a more objective evaluation according to the obvious method, but it is not widely used in the inspection of slab-type structures.

**Keywords:** bending waves, wave length range, theoretical and experimental study, slab-type construction.

#### Введение

В настоящее время существует множество старых зданий и сооружений, требующих обследования, однако при доступе к ним сталкиваются со многими трудностями для некоторых частей конструкций (фундамент, фундаментная стена, перекрытие...), поэтому разработка современных методов контроля качества строи-

тельных конструкций становится особенно актуальной. На наш взгляд, наиболее оптимальным для обеспечения целостности и минимального воздействия на эксплуатацию зданий и сооружений является неразрушающий метод [1–2]. Теория Лэмба об изгибных волнах широко используется в различных областях [3–5] и применяется в неразрушающем контроле для обнаруже-

ния дефектов и повреждений в пластинах [6–7], однако ее применение в строительстве в целом и в экспериментальных исследованиях качества строительных конструкций, в частности, остается ограниченным и недостаточно изученным.

На сегодняшний день наряду с развитием науки и техники наблюдается активизация деятельности практических применений метода с использованием изгибных волн в обследовании зданий и сооружений. Такие волны в материале конструкций распространяются с разной фазовой скоростью и отличаются от ультразвуковых длиной волны, скоростью распространения и интенсивностью затухания. Это отличие, с одной стороны, снижает разрешающую способность основанных на их использовании методов, но с другой — позволяет снизить затухание волн и тем самым увеличить базы измерений, а также глубину зондажа при одностороннем доступе к конструкции. При этом проблема применения подходящих диапазонов частот распространения волн для оценки характеристик материалов играет важную роль, и это направление недостаточно исследовано, однако многие исследования [8–9, 13] не затрагивают этот вопрос в настоящее время.

### Теоретический анализ

Нам известны теоретические выводы Лэмба, которые показали, что при возбуждении свободного удара в сплошной однородной бесконечной конструкции пластинчатого типа распространяется такой тип колебания, как антисимметричные волны. Этот вид колебаний деформирует плиту подобно изгибающей нагрузке, поэтому антисимметричные волны Лэмба называют изгибными. Подробно исследования теоремы Лэмба предоставлено в работах [10–11, 15]. Основным значимым выводом работы является уравнение распространения изгибных (антисимметричных) волн Лэмба. Дисперсионную кривую для основных колебаний

антисимметричных волн можно получить из характеристического уравнения, полученного Лэмбом [12–14]:

$$\frac{\operatorname{th} \beta_1 H / 2}{\operatorname{th} \beta_2 H / 2} = \frac{4 \beta_1 \beta_2}{\eta^2 \xi^2}, \quad (1)$$

где  $\beta_1 = \xi \sqrt{1 - \frac{V_u^2}{V_p^2}}$ ;  $\beta_2 = \xi \sqrt{1 - \frac{V_u^2}{V_s^2}}$ ;  $V_u$  — фазовая скорость;  $V_p$  — скорость продольной волны;  $V_s$  — скорость поперечной волны;  $\eta = 2 - \frac{V_u^2}{V_s^2}$ ;  $H$  — толщина плиты;  $\xi = 2\pi/\lambda$  — номер моды колебания.

Используя соотношения между упругими константами Ламе, динамическим модулем упругости  $E_d$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , получим выражения основных скоростей распространения упругих волн:

$$V_p = \sqrt{\frac{E_d(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad (2)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{E_d}{2\rho(1+\nu)}}, \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность среды.

Основными видами волн, распространяющимися в строительных конструкциях, являются объемные (продольные и поперечные) и каналовые (стержневые, пластинчатые, поверхностные и изгибные). Их скорость напрямую связана с коэффициентом Пуассона, что упрощает определение упругих характеристик строительных материалов. Согласно теории упругости существуют следующие соотношения между скоростями этих типов волн:

$$\frac{V_s}{V_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}; \quad (4)$$

$$\frac{V_R}{V_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \frac{0,87+1,12\nu}{1+\nu}; \quad (5)$$

$$\frac{V_R}{V_s} = \frac{0,87+1,12\nu}{1+\nu}, \quad (6)$$

где  $V_R$  — скорость рэлеевской волны.

Из теоретических формул упругости после преобразования уравнения (1) получаем

**Точки координат дисперсионных кривых при различных коэффициентах Пуассона**

$V_u / V_R$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
$H/\lambda$	$\nu = 0,2$	0,032	0,066	0,101	0,142	0,190	0,251	0,333	0,459	0,704
	$\nu = 0,25$	0,031	0,064	0,099	0,139	0,186	0,245	0,326	0,448	0,689
	$\nu = 0,3$	0,030	0,062	0,096	0,135	0,181	0,239	0,317	0,438	0,676

$$(p-1)\alpha^{g+h} - (p+1)\alpha^g + (p+1)\alpha^h - (p-1) = 0, \quad (7)$$

где  $\alpha = e^{2\pi H/\lambda}$ ;  $p = \frac{4gh}{(1+h^2)^2}$ ;

$$g = \sqrt{1 - \frac{V_u^2}{2V_R^2} \frac{(1-2\nu)(0,87+1,12\nu)^2}{(1-\nu)(1+\nu)^2}};$$

$$h = \sqrt{1 - \frac{V_u^2}{V_R^2} \frac{(0,87+1,12\nu)^2}{(1+\nu)^2}}; \quad \lambda — \text{длина волн.}$$

Из уравнения (7) легко доказать, что при  $f = 0$   $V_u/V_R \rightarrow 0$ , а при  $f = \infty$   $V_u/V_R \rightarrow 1$ , и тогда  $V_u = V_R$ . При наличии известных данных о конструкциях можно построить теоретические дисперсионные кривые скоростей изгибных волн, учитывая их длину, коэффициенты Пуассона, плотность, толщину конструкций и характеристики материалов. Для различных значений коэффициента Пуассона при решении уравнения (7) получено множество

значений  $\lambda/H$  и соответствующих значений  $V_u/V_R$ , которые приведены в таблице.

Изучение реакций конструкции при различных частотах позволяет наиболее хорошо изучить свойства строительных материалов конструкций во время инспекции зданий и сооружений. На рис. 1 представлены результаты анализа реакций бетонной плиты для различных модулей упругости.

**Результаты экспериментальных исследований. Обсуждение**

Для обследования конструкций с целью выявления характеристик материалов, дефектов и повреждений необходимо построить дисперсионные кривые скоростей с различными значениями длин волн. Схема эксперимента (рис. 2) представляет собой последовательное соединение измерительных акселерометров, согласующих усилителей, аналого-цифрового

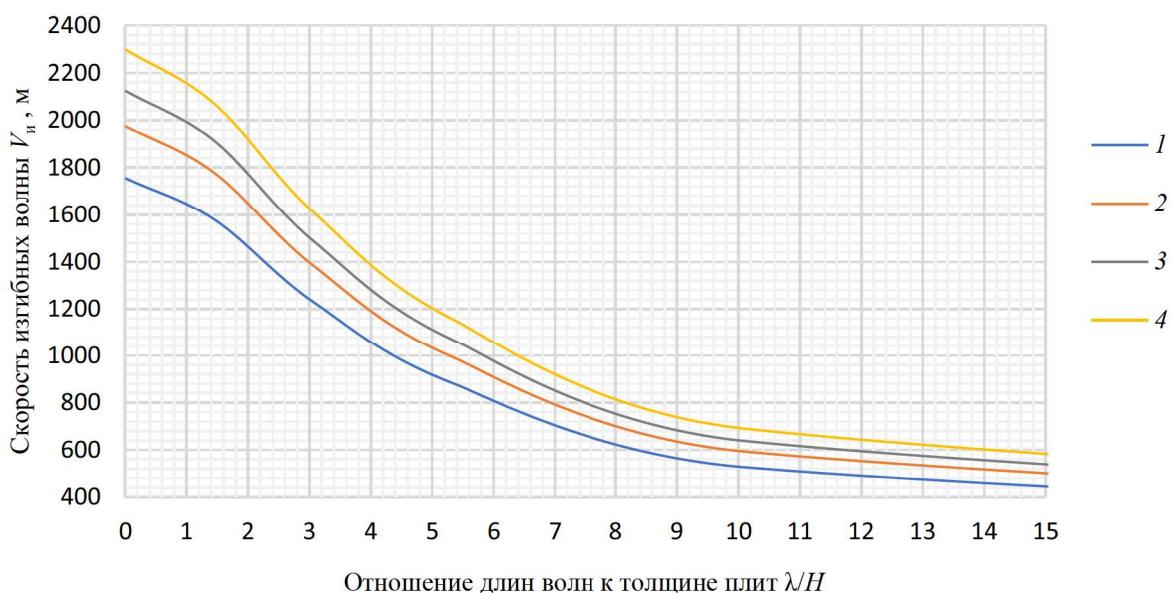
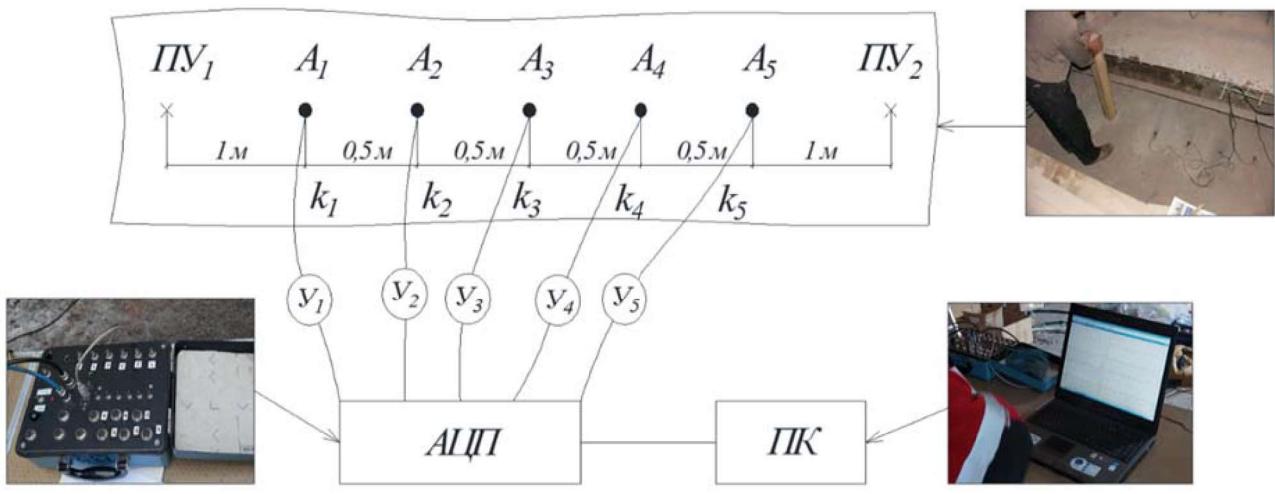


Рис. 1. Дисперсионные кривые бетонной плиты при различных модулях упругости:  
1 —  $E_d = 22000$  МПа; 2 —  $E_d = 27500$  МПа; 3 —  $E_d = 32000$  МПа; 4 —  $E_d = 37500$  МПа



$A_1 - A_5$  — акселерометры;  $\text{ПУ}_1, \text{ПУ}_2$  — точки приложения ударов;  
 $k_1 - k_5$  — антивибрационные кабели;  $Y_1 - Y_5$  — согласующие усилители;  
 АЦП — аналого-цифровой преобразователь; ПК — персональный компьютер

Рис. 2. Схема проведения эксперимента

преобразователя и персонального компьютера. Возбуждение колебания выполняется импульсной нагрузкой тампером из деревянного бруса либо молотком, снабженным наконечником из упругого материала.

Результаты испытаний обрабатываются в следующем порядке:

1. Определение времени распространения волны и периода колебаний между каждыми точками измерения.
2. Расчет средней скорости распространения волны для каждой точки измерительного створа при различных частотах.
3. Построение графиков скоростей распространения волны по измерительным створам.

Конечные результаты приведены на рис. 3–4, на которых показаны экспериментальные дисперсионные кривые (линии 1–5) скоростей изгибных волн в зависимости от их длин для бетонной плиты в разных объектах обследования. Скорости для линий 1, 2, 3 измерены на покрытии первого этажа подвального помещения, расположенного по адресу: г. Москва, Азовская ул., д. 24. Скорости для линий 4, 5 измерены на

перекрытии производственно-складского помещения (корпус № 13), расположенного по адресу: Московская обл., Домодедовский р-н, дер. Павлово.

Из полученных результатов при сравнении с теоретическими данными заметно, что с увеличением длины измерительных изгибных волн точность результатов измерений скоростей распространения изгибных волн снижается. На практике оказывается, что использование таких волн с отношением  $\lambda/H > 10$  может привести к неверным результатам для оценки строительных материалов. При использовании таких низкочастотных диапазонов очень сложно обнаружить повреждения плитных конструкций и отличить их от неповрежденных в процессе обследования.

### Заключение

Таким образом, при применении метода изгибных волн в обследовании и оценке свойств строительных материалов плитного типа должны учитываться соответствующие диапазоны измеряемых частот и другие характеристики конструкций (коэффициент Пуассона, упругие характеристики и толщина плиты). Сходство между

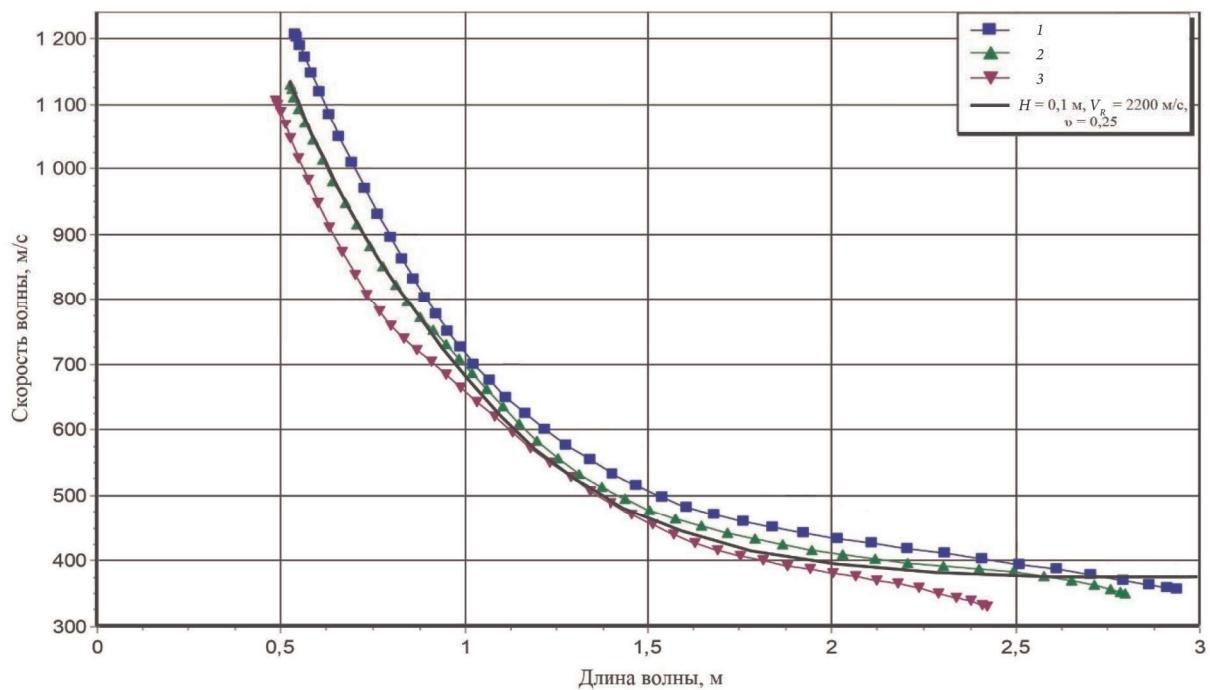


Рис. 3. Дисперсионные кривые изгибных волн покрытия первого этажа подвального помещения, расположенного по адресу: г. Москва, Азовская ул., д. 24

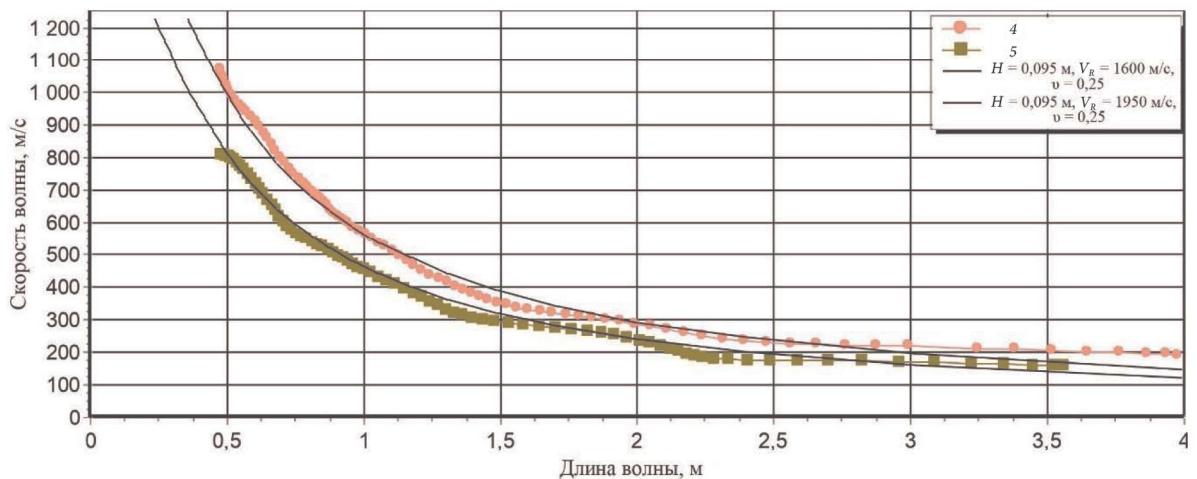


Рис. 4. Дисперсионные кривые изгибных волн в плите перекрытия производственно-складского помещения (корпус № 13), расположенного по адресу: Московская обл., Домодедовский р-н, дер. Павлово

теоретическими и экспериментальными результатами показывает, что использование изгибных волн подходящей длины может применяться для оценки свойств строительных материалов конструкций плитного типа. При этом для достижения достоверных результатов рекомендуется использовать волны с таким частотным диапазоном,

чтобы отношение длины волны к толщине плиты не превышало 10. В дальнейшем исследовании, после выбора оптимального частотного диапазона, можно разработать методику для решения задачи определения характеристик материала и выявления дефектов и повреждений в конструкции с помощью изгибных волн.

## Библиографический список

1. Абашин Е. Г. Определение класса бетона железобетонных балок по коэффициенту затухания колебаний // Строительство и реконструкция. 2019. № 4 (84). С. 3–9.
2. Байбурин А. Х., Погорелов С. Н. Исследование неоднородности прочности бетона монолитных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 3 (29). С. 12–18.
3. Захаров Д. Д. Параметрический анализ комплексных дисперсионных кривых изгибных волн Лэмба для слоистых пластин в низкочастотном диапазоне // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 4. С. 395–410.
4. Золотова О. П., Бурков С. И., Сорокин Б. П. Распространение волн Лэмба и SH-волн в пластине пьезоэлектрического кубического кристалла // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2010. Т. 3, № 2. С. 185–204.
5. Коробов А. И., Изосимова М. Ю. Нелинейные волны Лэмба в металлической пластинке с дефектами // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 5. С. 683–692.
6. Баев А. Р., Прохоренко П. П. Особенности распространения волн Лэмба в тонких двухслойных материалах // Вестник БНТУ. 2008. № 4. С. 52–55.
7. Pagneux V., Maurel A. Determination of Lamb mode eigenvalues // The Journal of the Acoustical Society of America. 2001. Vol. 110 (3). Pp. 1307–1314.
8. Lee Y. H., Oh T. The Simple Lamb Wave Analysis to Characterize Concrete Wide Beams by the Practical MASW Test // Materials. 2016. Vol. 9 (6). 437. <https://doi.org/10.3390/ma9060437>.
9. Marazzani J., Cavalagli N., Gusella V. Elastic Properties Estimation of Masonry Walls through the Propagation of Elastic Waves: An Experimental Investigation // Applied Sciences. 2021. Vol. 11 (19). 9091. <https://doi.org/10.3390/app11199091>.
10. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
11. Graff K. F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover Publishing, 1975. 649 p.
12. Šofer M., Ferfecki P., Šofer P. Numerical solution of Rayleigh-Lamb frequency equation for real, imaginary and complex wavenumbers // Machine Modelling and Simulations 2017 (MMS 2017). MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 157. 08011. 9 p.
13. Савин С. Н. Использование упругих колебаний различных длин волн для оценки динамических параметров зданий и сооружений и прочности каменной кладки // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 4. С. 43–54.

14. Ильяшенко А. В., Кузнецов С. В. Теоретические аспекты применения волн Лэмба в неразрушающей диагностике слоистых анизотропных сред // Дефектоскопия. 2017. Т. 53, № 4. С. 3–21.

15. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam-London: North-Holland PublCo, 1973. 425 p.

## References

1. Abashin E. G. *Opredelenie klassa betona zhelezobetonnykh balok po koeffitsientu zatukhaniya kolebaniy* [Determination of concrete class of reinforced concrete beams by vibration damping coefficient]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya – Construction and Reconstruction*, 2019, no. 4 (84), pp. 3–9.
2. Bayburin A. Kh., Pogorelov S. N. *Issledovanie neodnorodnosti prochnosti betona monolitnykh konstruktsiy* [Investigation of heterogeneity of strength of concrete in monolithic structures]. *Inzhenerno-stroitel'niy zhurnal – Engineering and Construction Journal*, 2012, no. 3 (29), pp. 12–18.
3. Zakharov D. D. *Parametricheskiy analiz kompleksnykh dispersionnykh krivykh izgibnykh voln Lembala dlya sloistykh plastin v nizkochastotnom diapazone* [Parametric analysis of complex dispersion curves of Lamb bending waves for layered plates in the low-frequency range]. *Akusticheskiy zhurnal – Acoustics Journal*, 2018, vol. 64, no. 4, pp. 395–410.
4. Zolotova O. P., Burkov S. I., Sorokin B. P. *Rasprostranenie voln Lemba i SH-voln v plastine p'ezoelektricheskogo kubicheskogo kristalla* [Propagation of Lamb waves and SH-waves in a plate of piezoelectric cubic crystal]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Matematika i fizika – Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 185–204.
5. Korobov A. I., Izosimova M. Yu. *Nelineynye volny Lemba v metallicheskoy plastinke s defektami* [Nonlinear Lamb waves in a metal plate with defects]. *Akusticheskiy zhurnal – Acoustics Journal*, 2006, vol. 52, no. 5, pp. 683–692.
6. Baev A. R., Prokhorenko P. P. *Osobennosti rasprostraneniya voln Lemba v tonkikh dvukhsloynykh materialakh* [Features of propagation of Lamb waves in thin two-layer materials]. *Vestnik BNTU – Bulletin of BNTU*, 2008, no. 4, pp. 52–55.
7. Pagneux V., Maurel A. *Determination of Lamb mode eigen values*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2001, vol. 110 (3), pp. 1307–1314.
8. Lee Y. H., Oh T. *The simple Lamb wave analysis to characterize concrete wide beams by the practical MASW test*. *Materials*, 2016, vol. 9 (6), 437. <https://doi.org/10.3390/ma9060437>.
9. Marazzani J., Cavalagli N., Gusella V. *Elastic properties estimation of masonry walls through*

the propagation of elastic waves. An experimental investigation. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11 (19), 9091. <https://doi.org/10.3390/app11199091>.

10. Viktorov I. A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solid bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 287 p.

11. Graff K. F. *Wave motion in elastic solids*. New York, Dover Publ., 1975, 649 p.

12. Šofer M., Ferfecki P., Šofer P. Numerical solution of Rayleigh-Lamb frequency equation for real, imaginary and complex wavenumbers. *Machine Modelling and Simulations*, 2017, (MMS 2017), MATEC Web of Conferences, 2018, vol. 157. 08011, 9 p.

13. Savin S. N. *Ispol'zovanie uprugikh kolebanii razlichnykh dlin voln dlya otsenki dinamicheskikh*

*parametrov zdaniy i sooruzheniy i prochnosti kamennoy kladki* [The use of elastic vibrations of different wavelengths for estimation of dynamic parameters of buildings and structures and strength of masonry]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Seismic-resistant construction. Safety of constructions*, 2017, no. 4, pp. 43–54.

14. Il'yashenko A. V., Kuznetsov S. V. *Teoreticheskie aspekty primeneniya voln Lemba v nerazrushayushchey diagnostike sloistykh anizotropnykh sred* [Theoretical aspects of Lamb waves' application in non-destructive diagnostics of layered anisotropic media]. *Defektoskopiya – Defectoscopy*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 3–21.

15. Achenbach J. D. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam-London, North-Holland PublCo, 1973, 425 p.