

УДК 692:519.6

DOI 10.23968/1999-5571-2024-21-4-23-34

© Е. В. Ермакова, ассистент

© E. V. Ermakova, assistant lecturer

© М. И. Рынковская, канд. техн. наук, доцент

© M. I. Rynkovskaya, PhD in Sci. Tech.,

(Российский университет дружбы народов,
Москва, Россия)

Associate Professor

(RUDN University, Moscow, Russia)

E-mail: ermakova-ev@pfur.ru, rynkovskaya-mi@pfur.ru

E-mail: ermakova-ev@pfur.ru, rynkovskaya-mi@pfur.ru

ВЛИЯНИЕ РАДИУСА ФИЛЬТРА НА ОПТИМИЗАЦИЮ ФОРМЫ ОБОЛОЧКИ В COMSOL MULTIPHYSICS

THE EFFECT OF THE FILTER RADIUS ON THE SHAPE OPTIMIZATION OF A SHELL IN COMSOL MULTIPHYSICS

Процесс оптимизации формы оболочек в COMSOL Multiphysics происходит путем деформации сетки в существующей геометрии, и во избежание слишком больших деформаций элементов модели перед вычислением необходимо произвести настройку специальных контролируемых параметров, в том числе установить необходимое значение радиуса фильтра (R_{\min}). Правильно подобранное значение радиуса фильтра способствует нахождению наиболее эффективного варианта конструкции. Вычислительный эксперимент по подбору радиуса фильтра проводится с использованием трех градиентных методов, заложенных в программу: MMA, IPOPT и SNOPT. В качестве исследуемой тестовой оболочки берется монолитный гладкий сферический купол из бетона. Основные этапы работы: демонстрация общего алгоритма оптимизации формы в программе, расчет оболочки с установкой различных значений радиуса фильтра с использованием трех градиентных методов и выбор оптимального решения. Определено, что установка минимального значения радиуса фильтра может привести к деформации модели и появлению неровностей, в то время как установка слишком большого радиуса фильтра приводит лишь к небольшим изменениям геометрии, оставляя модель практически в ее первоначальном варианте. Выявлено, что исследуемый параметр R_{\min} оказывает существенное влияние на конечный результат оптимизации. Таким образом, перед проведением расчета должны быть установлены необходимые параметры, ограничения, критерии. Неправильная настройка некоторых элементов может привести к нереалистичному результату оптимизации.

Ключевые слова: оптимизация формы, сферический купол, COMSOL Multiphysics, методы оптимизации, радиус фильтра.

The shape optimization process of shells in COMSOL Multiphysics simulation platform occurs by deforming the mesh in the existing geometry and, in order to avoid too large deformations of the model elements, before calculating it is necessary to adjust special controlled parameters, and set the required value of the filter radius (R_{\min}). A properly selected value of the filter radius enables to find the most effective design version. The computational experiment on the selection of the filter radius is carried out using three gradient methods in the COMSOL Multiphysics program, namely, MMA, SNOPT, and IPOPT. A monolithic smooth spherical dome made of concrete is taken as the test shell under study. The main stages of the work are the following: demonstration of the general algorithm of shape optimization in the program, calculation of the shell with setting different values of the filter radius using three gradient methods and selection of the optimal solution. It is established that setting of the minimum value of the filter radius can lead to deformation of the model and the appearance of irregularities, while setting of too large filter radius leads to only small changes in the geometry, gradually leaving the model almost in its original version. It has been found that the investigated parameter R_{\min} has a significant impact on the final optimization result. Thus, before performing the calculation, the necessary parameters, restrictions, and criteria must be established. Incorrect setting of some elements can lead to an unrealistic optimization result.

Keywords: shape optimization, spherical dome, COMSOL Multiphysics simulation platform, optimization methods, filter radius.

Введение

Повышение эффективности и экономичности возводимых оболочечных конструкций является одной из актуальных задач строительной отрасли. При проектировании оболочек для покрытия зданий и сооружений различного назначения оптимизация формы особенно важна из-за тесной взаимосвязи между формой и поведением конструкции.

Для покрытия здания активно применяются сферические купола. Конечно-элементное моделирование процесса их деформирования необходимо для создания прочной и долговечной конструкции. В настоящее время существуют специализированные программные комплексы, позволяющие проводить не только прочностной расчет, но и оптимизацию [1]. Однако при процессе оптимизации важно правильно определить и назначить специальные параметры, поскольку они оказывают существенное влияние на конечный результат оптимизации. К таким параметрам относится параметр радиуса фильтра, или радиуса сглаживания R_{\min} .

Данная статья посвящена процессу оптимизации формы с заданием необходимого параметра R_{\min} в современной программе конечно-элементного анализа COMSOL Multiphysics, которая обладает широкими возможностями для моделирования и последующего расчета оболочек простых и сложных форм. Модуль оптимизации, который дополняет базовый функционал программы, обеспечивает три типа структурной оптимизации — размера, топологии и формы. При оптимизации размеров изменяются геометрические параметры исследуемой модели (толщина, длина, ширина) с сохранением первоначального внешнего вида и топологии. Оптимизация топологии изменяет структуру модели с добавлением отверстий и новых элементов. При оптимизации формы топология остается без изменений, но изменяются границы, формы и контуры исследуе-

мого объекта. В модуле Shape Optimization есть две группы методов для решения оптимизационных задач — градиентные и безградиентные. Процесс оптимизации формы оболочки в COMSOL Multiphysics подробно описывается в статье [2] на примере оптимизации формы сферы и геликоида с использованием целевой функции энергии упругой деформации. В статье [1] представлена поэтапная схема проведения оптимизации формы в расчетных программах, и в том числе в COMSOL Multiphysics.

Для проведения оптимизационного расчета необходимые параметры задаются внутри специального модуля Shape Optimization, который обеспечивает решение задач тремя градиентными методами (решателями) на выбор — MMA или GCMMA (метод подвижных асимптот) [3, 4], IPOPT (метод внутренней точки)¹ [5] и SNOPT (разреженный метод нелинейной оптимизации) [6, 7].

Параметр радиуса фильтра, или радиус сглаживания R_{\min} в COMSOL Multiphysics, которому в основном и посвящена статья, отвечает за контроль гладкости границ оптимизированной модели и также за сохранение качества вычислительной сетки в ходе оптимизации сплошной формы. Методы фильтрации предоставляют простой и надежный инструмент для изучения всего пространства проектирования с точки зрения оптимальных конструкций [8]. Радиус фильтра определяет наименьший желаемый размер изгиба в оптимизированной структуре. Данный параметр устанавливается пользователем самостоятельно, и поиск подходящего значения для этого параметра позволяет избежать образования углублений и неровностей на модели.

Метод фильтрации широко используется в топологической оптимизации [9–11], но он также может быть использован при оптими-

¹ Ipopt and IpoptH. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.589.5002&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения: 20.07.2023).

зации формы [12], [13]. В статье [14] описано влияние R_{\min} на геометрию, аддитивное производство и механические свойства конструкции. В этом исследовании радиус сглаживания берется в диапазоне от 0 до 6. Обнаружено, что сложная и детализированная геометрия достигается при низких значениях R_{\min} , но при значении, близком к нулю, на модели появляются неровности, которые препятствуют правильному изготовлению деталей. При изучении метода фильтрации можно также отметить статью [15], где проводится сравнительный анализ результатов оптимизации с фильтром и без него. Однако в открытом доступе не было найдено исследований, рассматривающих применение радиуса фильтра к пространственным структурам и настройку этого параметра в COMSOL Multiphysics. В связи с этим целью исследования является выполнение оптимизационного расчета формы тестовой оболочки при задании различных значений R_{\min} с использованием трех методов: MMA, SNOPT и IPOPT. Для этого необходимо решить следующие задачи:

1. Представить общий процесс выполнения оптимизации формы в COMSOL Multiphysics.

2. Выполнить три этапа расчета: структурный анализ, оптимизационный расчет с настройкой R_{\min} с использованием трех методов и повторный структурный анализ оптимизированной модели.

3. Сравнить полученные результаты между собой.

Методы

Перед проведением любого вычислительного эксперимента в программе необходимо выполнить подготовительный этап, при котором исходная расчетная модель либо загружается в программный пакет путем импорта файла в одном из CAD-форматов, либо создается с нуля в COMSOL Multiphysics. Для интеграции геометрических элементов из архитектурных проектов созданы спе-

циальные модули для обеспечения взаимодействия между программными пакетами. В настоящее время COMSOL Multiphysics подключается к Revit и AutoCAD для синхронизации геометрии, а с помощью модуля CAD-import можно импортировать модель из Renga в форматах Parasolid, ACIS, STEP, IGES, STL и т. д.

Далее происходит переход непосредственно к геометрии самой модели. В этой части назначается материал и строится вычислительная сетка — mesh. Перед построением сетки выбирается тип конечных элементов, на которые будет разделена модель, и размеры самих элементов. В COMSOL Multiphysics доступны стандартные сетки, состоящие из 2D-элементов — треугольников и прямоугольников, а также представлены четыре типа 3D-сеток: из тетраэдров, гексаэдров, треугольных призм и пирамид. Для выбранного типа конечных элементов существуют предустановленные размеры: от чрезвычайно мелкого до чрезвычайно крупного [16]. Имеется два способа построения вычислительной сетки: автоматическая сетка с набором размеров элементов и управляемая пользователем сетка, где каждый размер назначается независимо.

До или после построения расчетной сетки в модели задаются нагрузки и ограничения. После установки граничных условий осуществляется переход к расчету на прочность (структурному анализу). Далее производится расчет и анализ полученных результатов, выбирается соответствующий этап исследования — оптимизация формы, и все остальные настройки уже выполняются в рамках этой системы. С учетом типа задачи определяется подходящий метод оптимизации из трех предложенных (MMA, SNOPT, IPOPT), задаются требуемая целевая функция-критерий системы, тип задачи оптимизации (минимизация или максимизация), ограничения и требуемое количество итераций. Не менее важным этапом является выбор

подходящего значения радиуса фильтра R_{\min} , который располагается в одной из настроек оптимизации формы. Единица измерения СИ для переменной — метры. В программе COMSOL Multiphysics радиус фильтра R_{\min} включен в настройки фильтрации и по умолчанию установлен равным 10 % от размера ограничивающего прямоугольника (Вbox) геометрической модели².

В качестве тестовой модели для расчета взята поверхность сферического купола — оболочки, которая образуется в результате вращения вокруг вертикальной оси меридиональной образующей в виде дуги круга [16].

Неявная форма задания половины сферической оболочки [17]:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ z &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметрическая форма задания:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta) = R \sin \alpha \sin \beta; \\ y &= y(\alpha, \beta) = R \sin \alpha \cos \beta; \\ z &= z(\alpha) = R \cos \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \alpha < \frac{\pi}{2}; \\ 0 &< \beta < 2\pi, \end{aligned}$$

где α — угол между нормалью к поверхности и осью Ox ; β — угол поворота плоскости меридиана от положительного направления оси Ox [1].

Купол является одной из наиболее эффективных форм тонкостенных пространственных конструкций и широко используется при проектировании крыш зданий и сооружений благодаря своим хорошим аэродинамическим, акустическим и прочностным свойствам (рис. 1). Одним из главных преимуществ купольных зданий является их энергоэффективность — снижение теплопотерь за счет меньшей площади поверхности [17].

Оболочка сферического купола, созданная в COMSOL Multiphysics, имеет радиус и высоту 10 м, толщину 0,1 м. В качестве материала выбран бетон В25 со следующими характеристиками: плотность $D = 2300 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 30 \times 10^9 \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$. Далее устанавливается вычислительная сетка — mesh. Поскольку геометрия не имеет сложных очертаний, то выбирается автоматическое построение сетки (physics-controlled mesh) с использованием треугольных элементов. Из предустановленных размеров выбирается мелкая сетка «fine», состоящая из 662 треугольников (рис. 2).

Купол имеет нижнее опорное кольцо, которому назначено жесткое закрепление. На поверхность оболочки действует равномерно распределенная вертикальная сила $F = 10\,000 \text{ Н/м}^2$. После проведения расчета на прочность происходит установка специальных параметров для проведения оптимизации. Прежде всего необходимо установить радиус фильтра R_{\min} , который



Рис. 1. Примеры купольных зданий. URL: <https://trip-for-the-soul.ru>; <https://skydome.pro/>; <https://svetpro.ru>

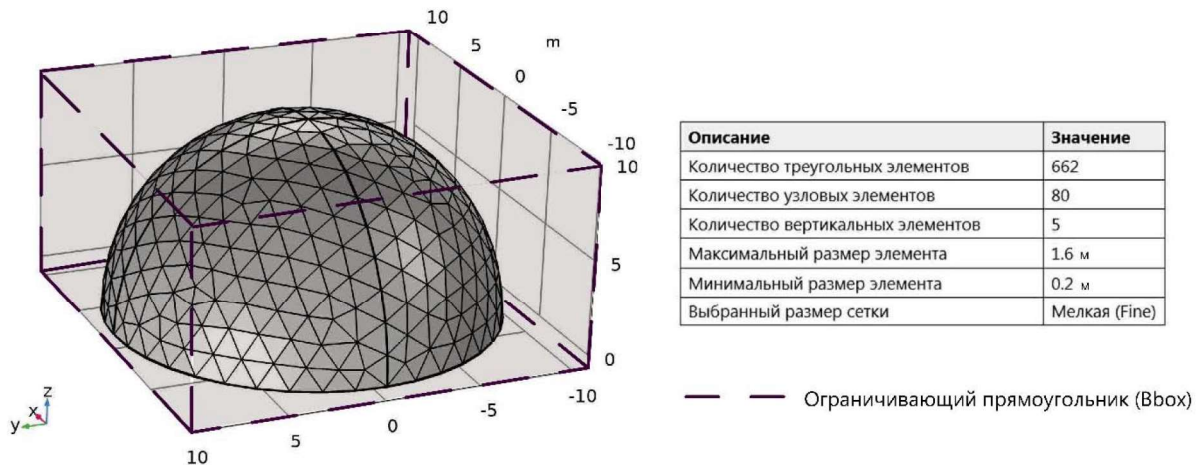


Рис. 2. Сеточная статистика

для получения видимого результата должен быть выбран больше размера наименьшего конечного элемента [18]. Минимальный размер конечного элемента в данной задаче составляет 0,2 м.

Для исследования устанавливаются следующие пользовательские значения радиуса фильтра: $R_{\min} = 0,5; 2; 5; 8; 10; 13; 15; 30; 50$ и 100 м. В качестве целевой функции-критерия задается общая энергия упругой деформации. Поскольку это значение получается путем интегрирования плотности энергии по всему объему конструкции, то плотность энергии упругой деформации W_s в COMSOL Multiphysics определяется как

$$W_s = \int_0^{\varepsilon_{el}} \sigma : d\mu_{el}, \quad (3)$$

где σ — главные напряжения; ε_{el} — основные деформации, которые рассчитываются во всех точках оболочки.

Для выполнения расчета используются три градиентных метода оптимизации — MMA, SNOPT и IPOPT с числом итераций 50. Выбирается следующий тип оптимизационной задачи: минимизация функции энергии упругой деформации.

Результаты и обсуждение

После проведения трех необходимых вычислительных этапов — расчета на проч-

ность (структурного анализа), оптимизационного расчета тремя градиентными методами с установкой пользовательских значений радиуса фильтра и повторного расчета на прочность — были получены следующие результаты:

1. Максимальное значение смещения при расчете на прочность перед оптимизацией составляет 0,836 мм. Установка радиуса фильтра R_{\min} в диапазоне от 0,5 до 10 м способствует снижению величины общего смещения на 40 %. При повторном расчете на прочность это значение уменьшается еще на 10 %, в то время как при назначении R_{\min} в диапазоне от 10 до 100 м наблюдается противоположный процесс: увеличение величины общего смещения на 40 %. Начиная с $R_{\min} = 30$ м максимальное смещение приближается к исходному значению, полученному в ходе исходного расчета на прочность (рис. 3).

2. Перед оптимизацией максимальное значение первого главного напряжения составляет 1,61 МПа. Второе главное напряжение составляет -0,753 МПа (min) и 0,223 МПа (max). Максимальное значение третьего главного напряжения составляет -2,05 МПа (max). Максимальное значение первых напряжений значительно возрастает при $R_{\min} = 10$ м, вторых напряжений — при

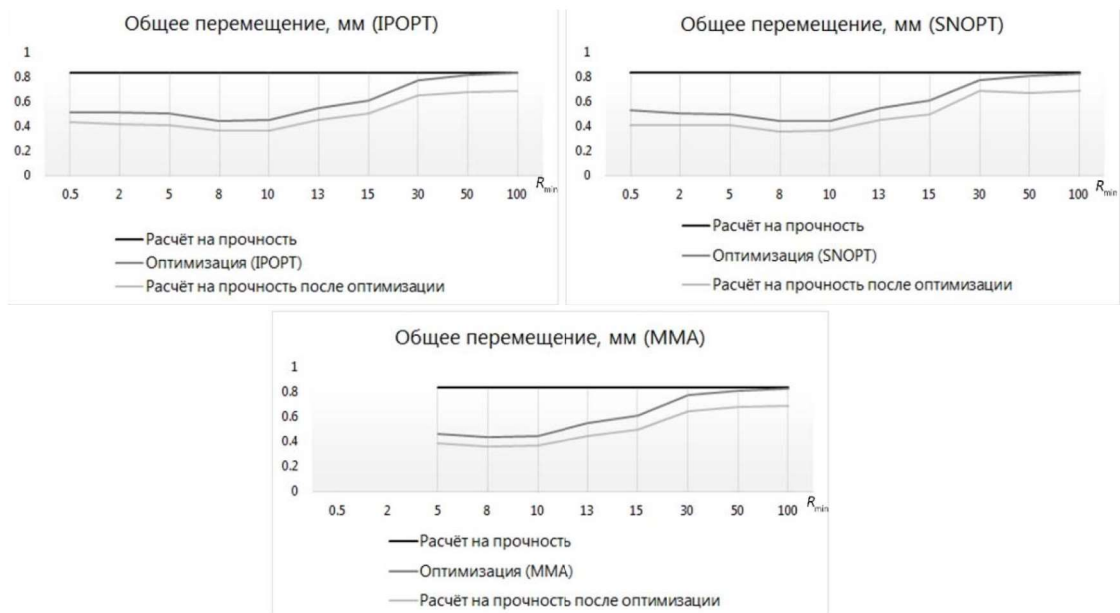


Рис. 3. Общее перемещение (IPOPT, SNOPT, MMA)

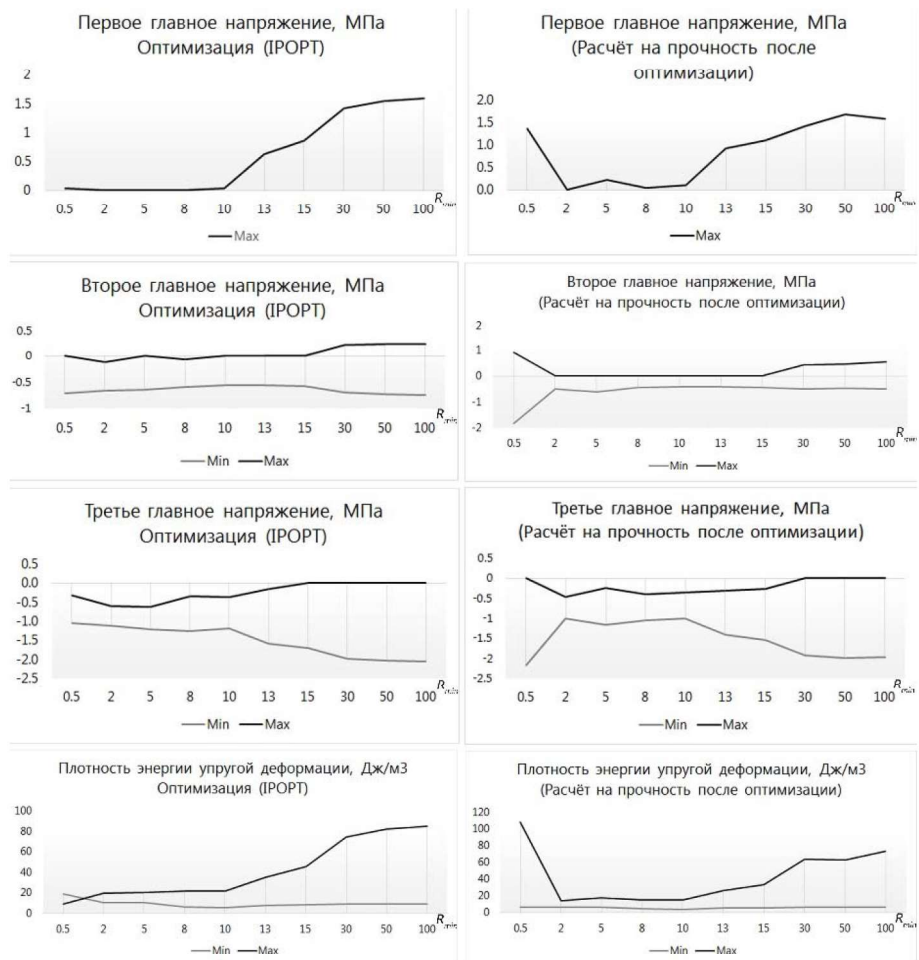


Рис. 4. Результаты, полученные с помощью решателя IPOPT

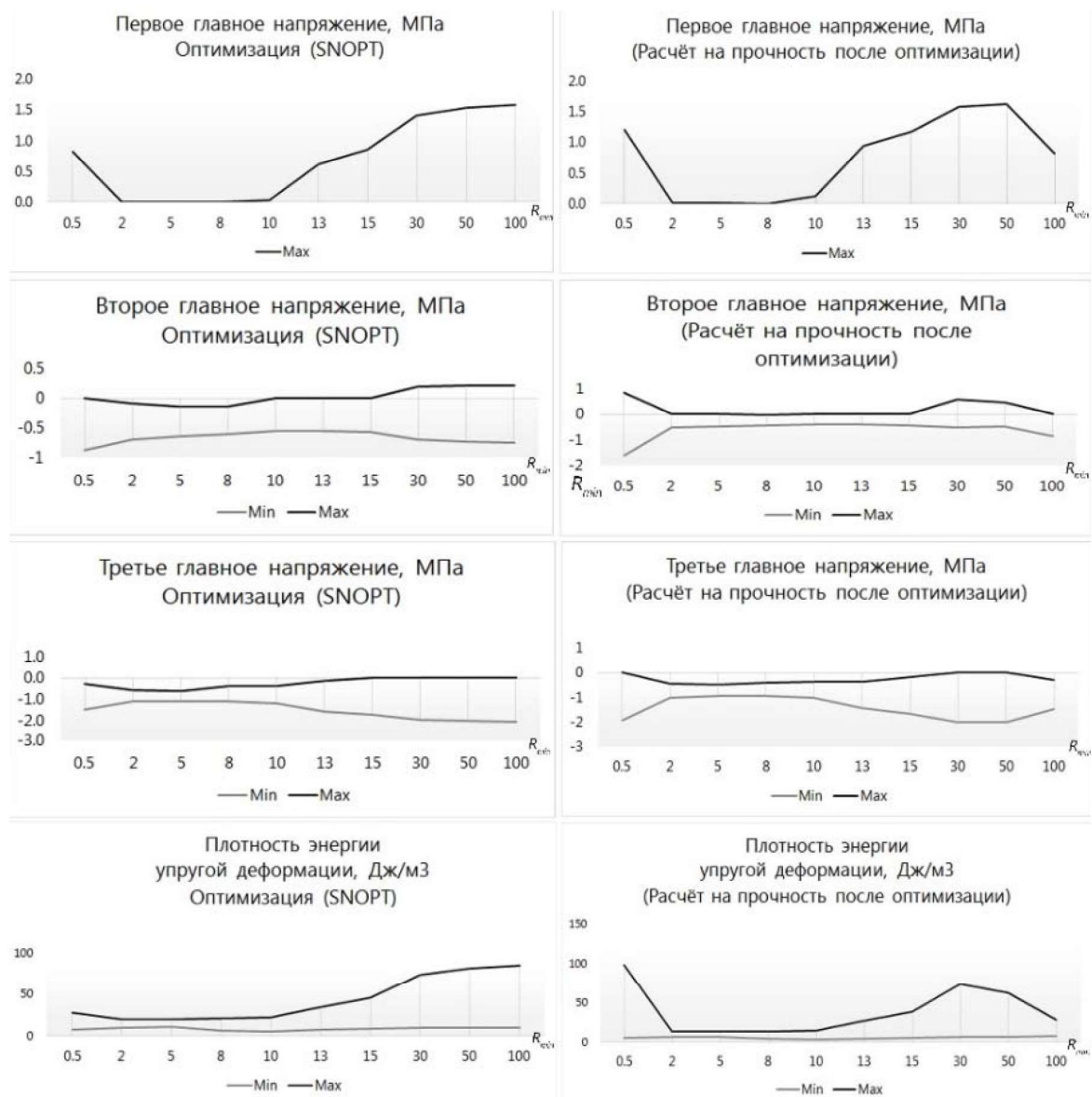


Рис. 5. Результаты, полученные с помощью решателя SNOPT

$R_{\min} = 15$ м. А максимальное значение третьих главных напряжений уменьшается при $R_{\min} = 15$ м. Плотность энергии деформации увеличивается при $R_{\min} = 10$ м (рис. 4–6).

3. При проведении вычислительного эксперимента тремя оптимизационными методами с использованием показателей радиуса фильтра можно наблюдать небольшую разницу в итоговых значениях в промежутке задания R_{\min} от 0,5 до 10 м, далее уже не возникает отличий между результатами в каждом методе. На рис. 7 приведено сравнение ре-

зультатов общего перемещения, плотности энергии упругой деформации и напряжений.

4. Наибольшее изменение формы оболочки наблюдается при установке R_{\min} в диапазоне от 0,5 до 8 м. Высота сферического купола колеблется от 10 м до 7 м. Однако при $R_{\min} = 0,5$ в самой модели образуются неровности, которые в конечном итоге приводят к недостоверному результату оптимизации (рис. 8).

5. Следует отметить, что с увеличением значения R_{\min} значение целевой функции

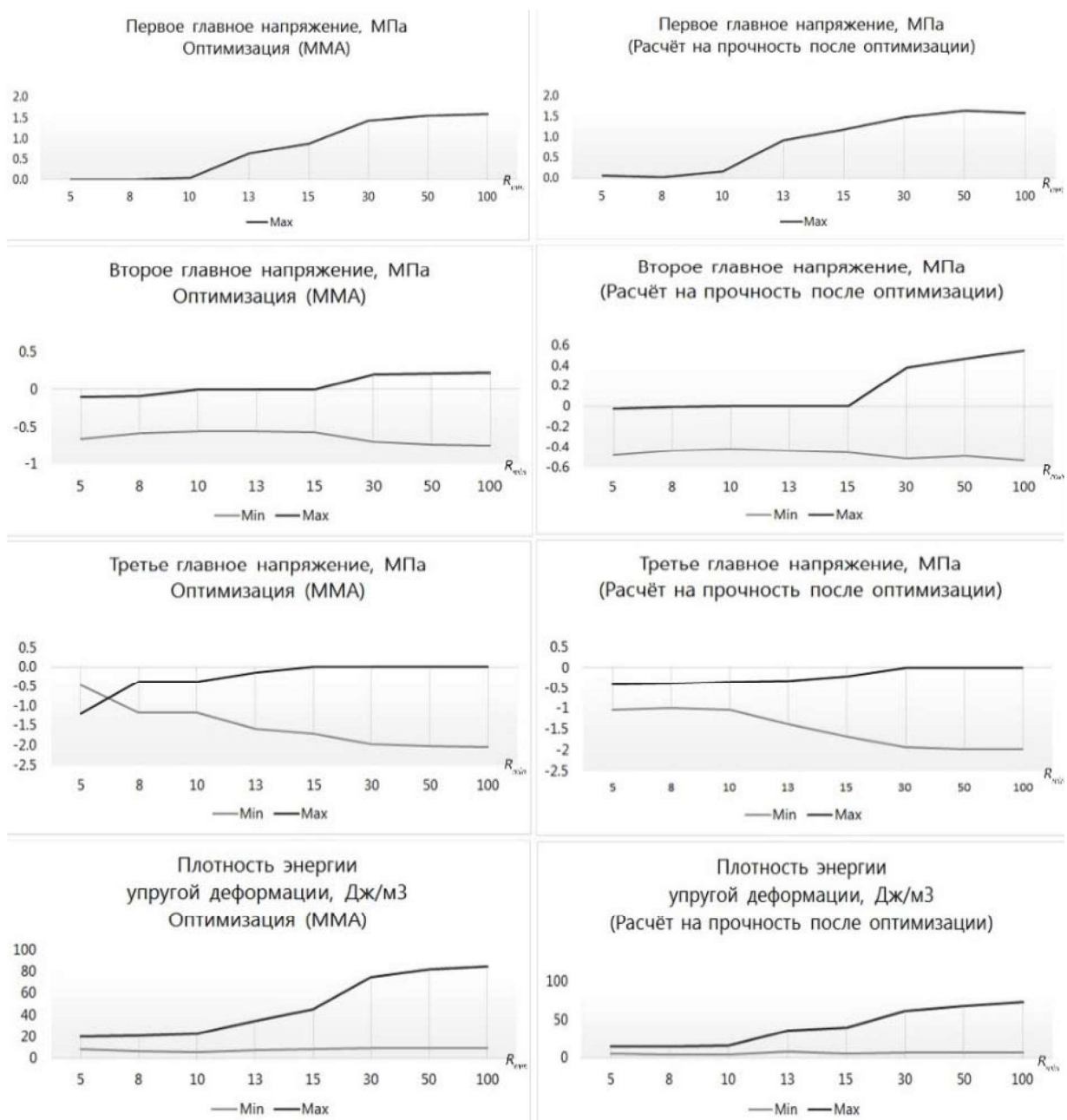


Рис. 6. Результаты, полученные с помощью решателя MMA

также увеличивается и решателям требуется меньше итераций для получения решения с требуемой точностью, что также приводит к сокращению процессорного времени на обработку результатов. Начиная с $R_{min} = 30$ м весь процесс поиска оптимального решения происходит за 4–6 итераций из заданного числа 50. Оптимальное значение целевой функции можно получить с помощью решателя

IPOPT с радиусом фильтра $R_{min} = 5$ м. Значение оптимизированной функции составляет 564,8 Дж (таблица).

6. Не все значения фильтра могут быть приемлемы для решателей. Например, не удалось получить решение с фильтрами 0,5 и 2 м с помощью MMA, в то время как с помощью IPOPT и SNOPT удалось провести оптимизацию.

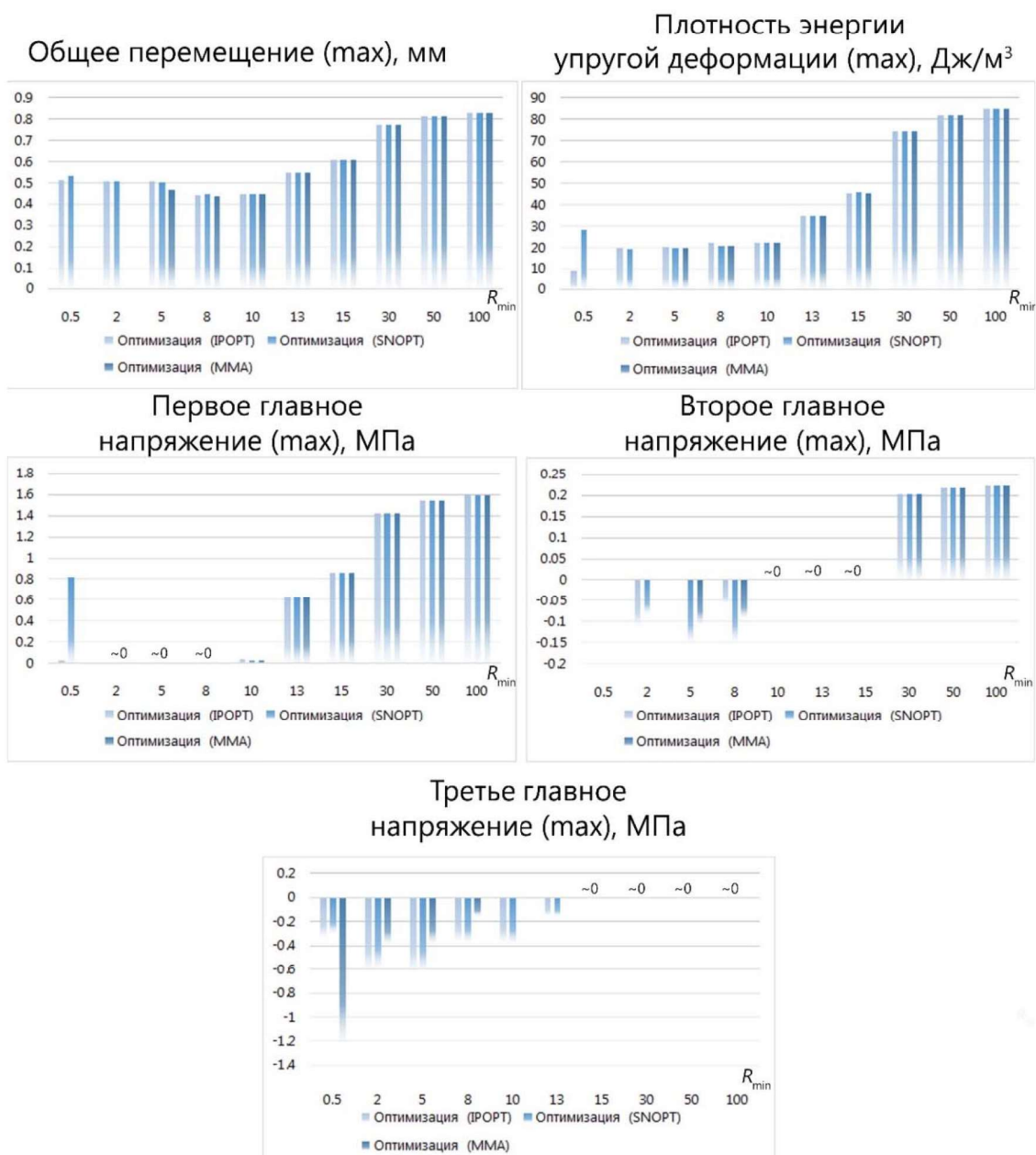


Рис. 7. Сравнение результатов оптимизации, полученных с помощью трех методов

Заключение

Проанализировав все полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Процесс оптимизации формы тесно связан с подготовительным этапом, на котором настраиваются все необходимые параметры. Все настройки должны быть изучены и протестированы, чтобы избежать неправильного конечного результата.

2. Подбор подходящих значений радиуса фильтра способствует расширению возможностей для проектирования оболочек.

3. Чем больше взято пользовательское значение радиуса фильтра, тем более простой и гладкой становится геометрия конечной формы. Модель постепенно становится приближенной к первоначальному виду до проведения оптимизации. В то же время ис-

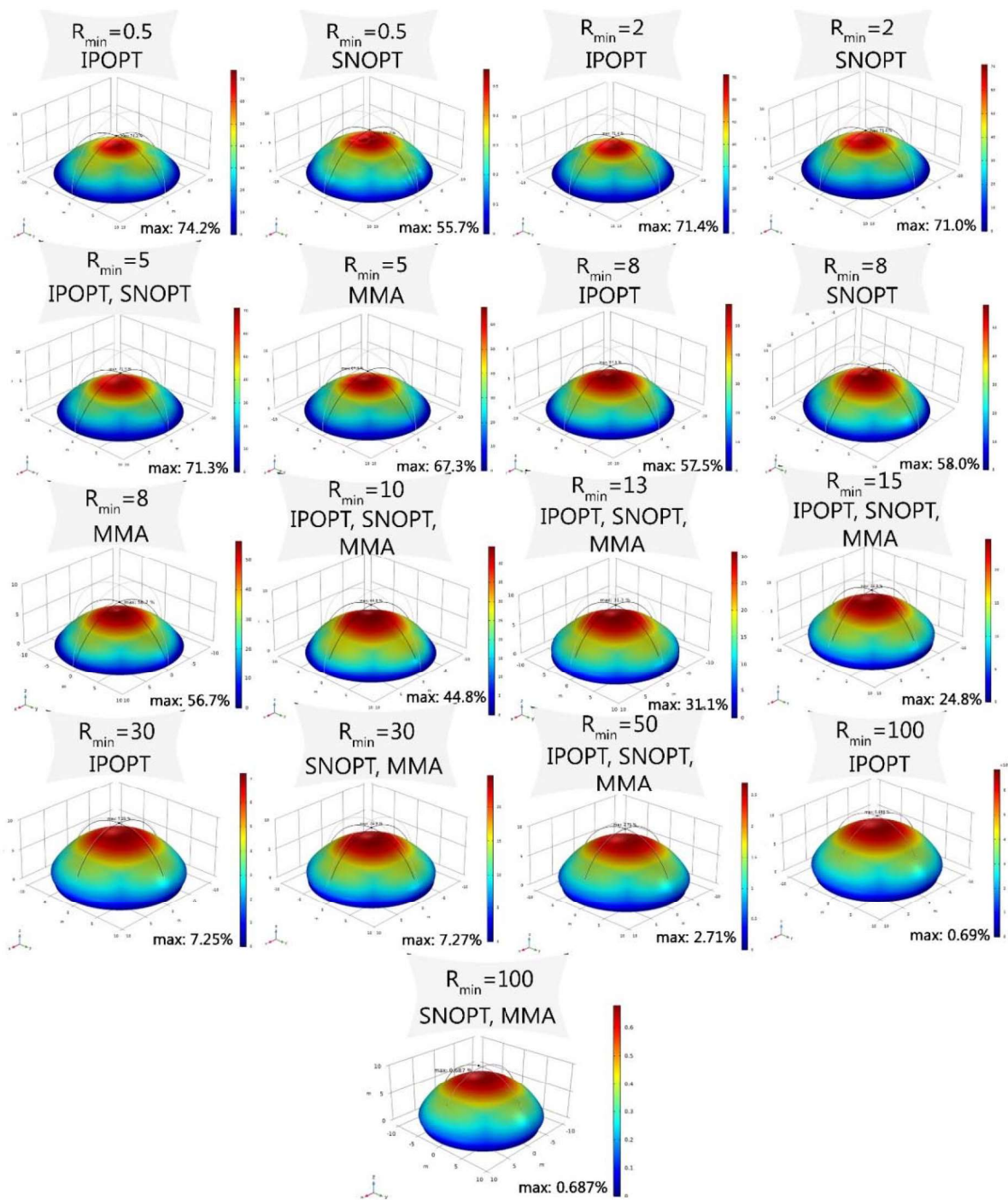


Рис. 8. Относительное нормальное смещение границы оболочки при оптимизации (IPOPT, SNOPT, MMA)

пользование слишком маленького значения радиуса фильтра может привести к появлению неровностей на модели.

4. Среди рассмотренных значений радиуса фильтра для сферы наилучшим вариантом является установка R_{min} в пределах 5–10 м

в программе COMSOL Multiphysics, что составляет 25–50 % от общего размера модели.

Благодарности. Публикация выполнена в рамках проекта № 202247-2-000 Системы грантовой поддержки научных проектов РУДН.

Результаты по оптимизации при установке разных значений радиуса фильтра R_{\min} , м

Показатели	Радиус фильтра R_{\min} , м									
	0,5	2	5	8	10	13	15	30	50	100
W_s (IPOPT)	564,8	573,5	564,8	580,7	605,2	733,9	827,1	1141	1229	1269
N_{tot} итераций	47	50	47	50	44	16	10	6	5	4
Общее вычислительное время, с	1622	573,5	564,8	972	2794	208	140	67	60	59
W_s (SNOPT)	589,9	573,4	604,8	580,6	605,2	733,9	827	1141	1229	1269
N_{tot} итераций	50	24	50	35	29	18	17	6	5	4
Общее вычислительное время, с	467	685	528	997	551	253	299	84	61	130
W_s (MMA)	–	–	574,8	581,9	605,3	733,9	827	1141	1230	1269
N_{tot} итераций	–	–	10	13	9	40	32	5	8	5
Общее вычислительное время, с	–	–	557	471	268	447	468	581	142	113

Библиографический список

1. Ермакова Е. В., Рынковская М. И. Современные возможности программного обеспечения для оптимизации формы оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. № 2 (19). С. 220–232.

2. Ermakova E., Elberdov T., Rynkovskaya M. Shape Optimization of a Shell in Comsol Multiphysics // Computation. 2022. № 4 (10). 54 p.

3. Svanberg K. MMA and GCMMA — Fortran versions. Stockholm: KTH, Royal Institute of Technology, 2013. 23 p.

4. Svanberg K. MMA and GCMMA — two methods for nonlinear optimization // Mathematics. 2014. 15 p. URL: <https://people.kth.se/~krille/mmagcmma.pdf>.

5. Wächter A. Short Tutorial: Getting Started with Ipopt in 90 Minutes // Proceedings of the Dagstuhl Seminar, Dagstuhl, Germany, 2009. 17 p.

6. Gill P. E., Murray W., Saunders M. A., Drud A., Kalvelagen E. GAMS/SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. 2002. 39 p.

7. Gill P. E., Murray W., Saunders M. A. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization // SIAM J. Optim. 2001. Vol. 47 (1). Pp. 979–1006.

8. Najian Asl R., Bletzinger K.-U. The implicit bulk-surface filtering method for node-based shape optimization and comparison of explicit and implicit filtering techniques // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2023. Vol. 66. 111. DOI 10.1007/s00158-023-03548-2.

9. Keshavarzzadeh V., Kirby R. M., Narayan A. Parametric topology optimization with multiresolution finite element models // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2019. Vol. 119 (7). Pp. 1–23. DOI 10.1002/nme.6063.

10. Wang M. Y., Wang S. Bilateral Filtering for Structural Topology Optimization // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005. Vol. 63 (13). Pp. 1911–1938. DOI 10.1002/nme.1347.

11. Morelli J. A. Evaluation of Topology Optimization Filtering with Numeric Examples. URL: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/102220/Morelli_Topology_Report_Fall2019_v03.pdf (дата обращения: 08.07.2023).

12. Richards D., Amos M. Shape Optimization with Surface-Mapped CPPNs // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2016. Vol. 21 (3). Pp. 391–407. DOI 10.1109/TEVC.2016.2606040.

13. Montoya-Zapata D., Acosta D. A., Moreno A., Posada J., Ruiz-Salguero O. Sensitivity Analysis in Shape Optimization using Voxel Density Penalization // CEIG — Spanish Computer Graphics Conference. 2019. DOI 10.2312/ceig.20191201.

14. Daoud F., Jurecka F., Bletzinger K.-U. Filtering and Regularization Shape Optimization Techniques for Preliminary Design // 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 18–21 April 2005, Austin, Texas. DOI 10.2514/6.2005-2209.

15. Тур В. И. Купольные конструкции: формообразование, расчет, конструирование, повышение эффективности. М.: ACB, 2004. 96 с.

16. Krivoschapko S. N., Ivanov V. N. Encyclopedia of Analytical Surfaces. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2015. 752 p.

17. Попова Е. И., Бащенко Н. Н., Сорвачёв А. И., Чуприна О. Д. Поверхность купола как элемент энергоэффективности ограждающих конструкций // Вестник Сибирского гос. индустриального ун-та. 2017. № 2 (20). С. 30–35.

18. Querin O. M., Victoria M., Alonso C., Ansola R., Martí P. Topology Design Methods for Structural Optimization. Butterworth-Heinemann, 2017. 204 p.

References

1. Ermakova E. V., Rynkovskaya M. I. Modern software features for shape optimization of shells. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering structures and constructions*, 2023, no. 2 (19), pp. 220–232.
2. Ermakova E., Elberdov T., Rynkovskaya M. Shape optimization of a shell in Comsol Multiphysics. *Computation*, 2022, no. 4 (10), 54 p.
3. Svanberg K. *MMA and GCMMA—Fortran versions*. Stockholm, KTH, Royal Institute of Technology, 2013, 23 p.
4. Svanberg K. MMA and GCMMA — two methods for nonlinear optimization. *Mathematics*, 2014, 15 p. Available at: <https://people.kth.se/~krille/mmagmma.pdf>.
5. Wächter A. Short Tutorial: Getting Started with Ipopt in 90 Minutes. *Proceedings of the Dagstuhl Seminar*, Dagstuhl, Germany, 2009, 17 p.
6. Gill P. E., Murray W., Saunders M. A., Drud A., Kalvelagen E. .GAMS/SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization, 2002, 39 p.
7. Gill P. E., Murray W., Saunders M. A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM J. Optim*, 2001, vol. 47 (1), pp. 979–1006.
8. Najian Asl R., Bletzinger K.-U. The implicit bulk-surface filtering method for node-based shape optimization and comparison of explicit and implicit filtering techniques. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, vol. 66, 111. DOI 10.1007/s00158-023-03548-2.
9. Keshavarzadeh V., Kirby R. M., Narayan A. Parametric topology optimization with multi-resolution finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, vol. 119 (7), pp. 1–23. DOI 10.1002/nme.6063.
10. Wang M. Y., Wang S. Bilateral filtering for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, vol. 63 (13), pp. 1911–1938. DOI 10.1002/nme.1347.
11. Morelli J. A. Evaluation of topology optimization filtering with numeric examples. Available at: https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/102220/Morelli_Topology_Report_Fall2019_v03.pdf (accessed: 08.07.2023).
12. Richards D., Amos M. Shape optimization with surface-mapped CPPNs. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, vol. 21 (3), pp. 391–407. DOI 10.1109/TEVC.2016.2606040.
13. Montoya-Zapata D., et al. Sensitivity analysis in shape optimization using Voxel Density Penalization. *CEIG — Spanish Computer Graphics Conference*, 2019. DOI 10.2312/ceig.20191201.
14. Daoud F., Jurecka F., Bletzinger K.-U. Filtering and regularizing shape optimization techniques for preliminary design. *Proceedings of the 46-th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 18–21, 2005, Austin, Texas*. DOI 10.2514/6.2005-2209.
15. Tur V. I. *Kupol'nye konstruksii: formoobrazovanie, raschet, konstruirovaniye, povysheniye effektivnosti* [Dome structures: shaping, calculation, design, efficiency improvement]. Moscow, ASV Publ., 2004, 96 p.
16. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N. *Encyclopedia of analytical surfaces*. Cham, Switzerland, Springer International Publ., 2015, 752 p.
17. Popova E. I., Bashchenko N. N., Sorvachyov A. I., Chuprina O. D. *Poverkhnost' kupola kak element energoeffektivnosti ograzhdayushchikh konstruksiy* [Dome surface as an element of energy efficiency of enclosing structures]. *Vestnik Sibirskogo gos. industrial'nogo un-ta – Bulletin of the Siberian State Industrial University of Russia*, 2017, no. 2 (20), pp. 30–35.
18. Querin O. M., et al. Topology design methods for structural optimization. Butterworth-Heinemann Publ., 2017, 204 p.