

УДК 624.046

© В. В. Карпов, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

© Е. О. Афанасьева, ведущий инженер
(АО «Институт Гипростроймост — Санкт-Петербург»,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: elena.afaseva2064@gmail.com

DOI 10.23968/1999-5571-2024-21-4-35-43

© V. V. Karpov, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

© E. O. Afanasyeva, chief engineer
(«Institute Giprostroymost — St.Petersburg» JSC,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: elena.afaseva2064@gmail.com

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛИТЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

STRESS-STRAIN STATE OF A PLATE SUPPORTED BY RIBS OF DIFFERENT CONFIGURATION

Рассматриваются строительные конструкции в виде плит, подкрепленных ребрами жесткости в одном направлении. Граничные условия конструкции: два противоположных конца закреплены жестко, а два других противоположных конца свободны. Для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций применимы численные методы, например метод конечных элементов (МКЭ). Также приближенно считают, что для расчетов можно использовать балочную аналогию. В работе дается аналитическое обоснование, когда можно считать задачу расчета таких конструкций осесимметричной, и предлагается простая, но более точная, чем балочная, методика расчета таких конструкций. Используется метод Л. В. Канторовича в первом и втором приближении, который сводит вариационную задачу для двойного интеграла к вариационной задаче для одномерного интеграла. Из условия минимума полученного одномерного функционала находятся обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые условия. Если жесткость ребер «размазывается» по плите, то полученная краевая задача имеет точное решение. Для ребер различной конфигурации (в виде короба, тавра, двутавра, сплошного сечения) анализируется жесткость подкреплений для выбора наиболее рационального. Для каждого вида ребер приводятся их жесткостные характеристики.

Ключевые слова: плита, балка, ребра жесткости, метод Л. В. Канторовича, напряженно-деформированное состояние, функционал.

The paper considers construction designs as single-span plates with rib stiffeners located in one direction. The boundary conditions of the considered design are the following: two opposite ends are fixed rigidly and the other two opposite ends are free. In order to calculate the stress-strain state (SSS) of such structures, the authors use numerical methods, such as the finite element method (FEM). It is also approximated that the beam analogy can be applicable for the calculations. The paper gives an analytical justification when the problem of calculating structures can be considered axi-symmetric and proposes a simple, but more accurate than beam analogy, methodology for calculating such structures. The method of L. V. Kantorovich in the first and second approximation is used due to which the variational problem for the double integral is reduced to the variational task for the one-dimensional integral. The ordinary differential equations and boundary conditions are found from the minimum condition of the obtained one-dimensional functional. If ribs stiffness is “smeared” over the plate, a received boundary value problem has exact solution. For ribs of different configurations (box, T-beam, I-beam, continuous section) the stiffness of reinforcements is analyzed to select the most rational one. Stiffness characteristic are provided for every rib type.

Keywords: plate, beam, stiffness ribs, the method of L. V. Kantorovich, stress-strain state, functional.

Введение

Строительные конструкции в виде плит, две противоположные стороны которых закреплены жестко, а две другие противоположные стороны свободны, применяются в гражданском строительстве, и в мостостроении, и при строительстве других объектов. Наиболее широко распространенными мостовыми сооружениями с описанной выше конструктивной схемой являются рамные и арочные мосты [1–3], одно- и многопролетные замкнутые рамы с V -образными опорами [4, 5]. Ребристыми бывают стальные, железобетонные и сталежелезобетонные пролетные строения [2, 3, 6]. В промышленном и гражданском строительстве применяются железобетонные ребристые перекрытия и покрытия зданий [7].

В инженерной практике чаще всего для расчета НДС пролетных строений и плит перекрытия и покрытия применяют МКЭ [8, 9]. Иногда приближенно считают, что такая плита деформируется осесимметрично, и для расчета ее НДС можно использовать балочные зависимости [10]. Однако отсутствуют аналитическое обоснование использования такой методики и оценка погрешности получаемых при этом решений. Задача усложняется, если плита подкреплена ребрами [11]. Есть два способа учета ребер жесткости: путем приведения подкрепленной плиты к гладкой плите эквивалентной жесткости (метод конструктивной анизотропии) [10, 12] и учет дискретного расположения ребер [8, 13–20]. В данной статье рассматривается метод конструктивной анизотропии как наиболее простой.

Для нахождения аналитического решения при расчете подкрепленных пластин чаще всего применяется метод Ритца [13, 16, 18]. Метод Л. В. Канторовича, рассматриваемый в данной статье, ранее применялся только в расчетах гладких плит и оболочек [21–23].

Подкрепляющие плиту ребра могут быть разной конфигурации. Заслуживает вни-

мания количественная оценка повышения жесткости плиты при разной конфигурации ребер и выбор наиболее рационального подкрепления.

Цель данной статьи: разработка простой, но наиболее точной методики расчета плит, подкрепленных ребрами жесткости, два противоположных конца которых закреплены жестко, а два других свободны.

Теория и методы

1. Общие соотношения

Будем рассматривать жесткую плиту, допускающую малые прогибы. Такая плита будет работать только на изгиб, поэтому перемещениями в направлениях x и y , соответственно, U и V , пренебрегаем ($U = V = 0$), также будем считать, что усилия N_x , N_y , N_{xy} будут малыми ($N_x = N_y = N_{xy} = 0$).

В этом случае функционал полной потенциальной энергии деформации плиты, находящейся под действием поперечной нагрузки q , будет иметь вид [24]:

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + 2M_{xy} \chi_{12} - 2qW] dx dy.$$

Здесь для плиты, подкрепленной ребрами, изгибающие и крутящий моменты будут равны:

$$M_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left(J_x + \frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu \chi_2);$$

$$M_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left(J_y + \frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu \chi_1);$$

$$M_{xy} = \frac{E}{1+\mu} \left(J_{xy} + \frac{h^3}{12} \right) \chi_{12};$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \chi_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \chi_{12} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2} (J_x + J_y).$$

Здесь J_x , J_y — моменты инерции сечения ребер в направлениях x и y соответственно ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$); E , μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты; W — перемещение плиты в направлении z ; a — ширина плиты в направлении x ;

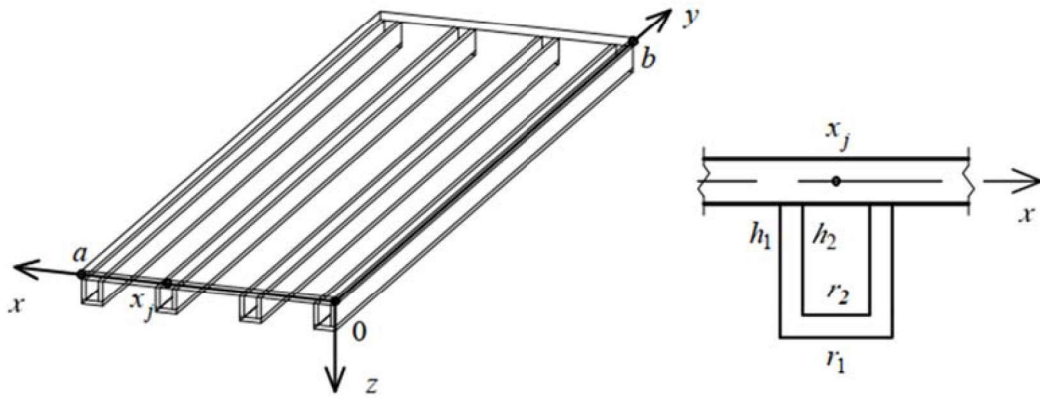


Рис. 1. Общий вид рассматриваемых плит

b — длина плиты в направлении y ; h — толщина плиты.

Подставив выражения моментов и изгибных деформаций в функционал, получим

$$E_s = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \times \int_0^a \int_0^b \left[d_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + d_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + d_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + d_4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2q_1 W \right] dx dy. \quad (1)$$

Здесь

$$d_1 = J_x + \frac{h^3}{12}; \quad d_2 = J_y + \frac{h^3}{12}; \quad d_3 = \mu(d_1 + d_2);$$

$$d_4 = 2(1-\mu) \left(J_{xy} + \frac{h^3}{12} \right); \quad q_1 = \frac{1-\mu^2}{E} q.$$

Будем считать, что значение b существенно больше значения a , и подкрепляющие плиту ребра расположены по направлению оси Oy . Общий вид рассматриваемых плит показан на рис. 1. Будем считать, что при $y=0, y=b$ плита жестко закреплена, а при $x=0, x=a$ она свободна.

Жесткость ребер будем «размазывать» по площади плиты, то есть использовать метод конструктивной анизотропии [24] и находить приведенную жесткость подкреплений. Число ребер равно m . Все ребра одинакового размера. На рис. 2–5 отображены виды рассматриваемых ребер.

Виды подкрепляющих ребер:
Вариант I (рис. 2).

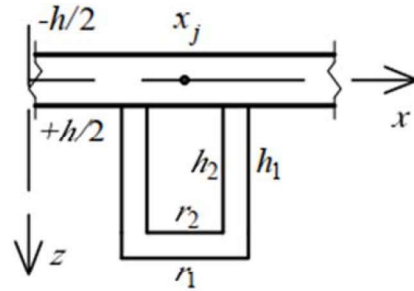


Рис. 2. Ребро коробчатого сечения

Моменты инерции для ребра коробчатого сечения:

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} (h + h_1) \right];$$

$$J_2 = \int_{h/2}^{h/2+h_2} z^2 dz = \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_2 \right)^2 + \frac{h}{2} (h + h_2) \right];$$

$$J_y = m \left[\frac{J_1 r_1}{a} - \frac{J_2 r_2}{a} \right]; \quad J_x = m \left[\frac{J_1 r_1^2}{a^2} - \frac{J_2 r_2^2}{a^2} \right].$$

Вариант II (рис. 3).

Моменты инерции для ребра сплошного сечения:

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} (h + h_1) \right];$$

$$J_y = m \frac{J_1 r_1}{a}, \quad J_x = m \frac{J_1 r_1^2}{a^2}.$$

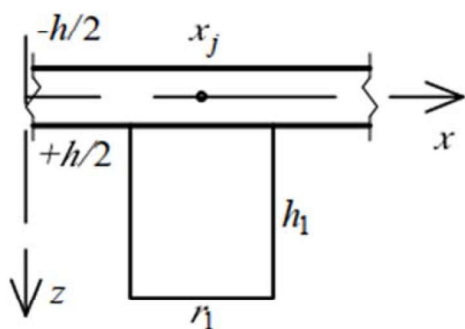


Рис. 3. Ребро сплошного сечения

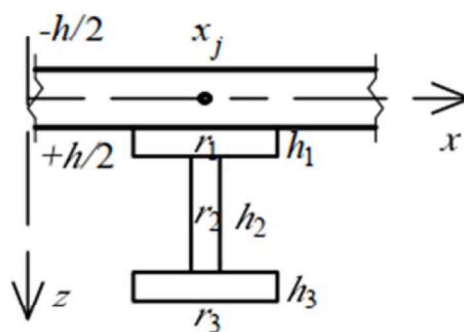


Рис. 5. Ребро двутаврового сечения

Вариант III (рис. 4).

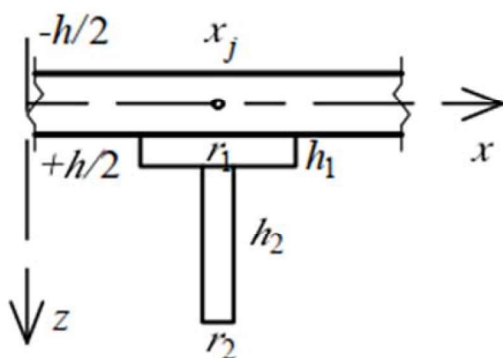


Рис. 4. Ребро таврового сечения

Моменты инерции для ребра таврового сечения:

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} (h + h_1) \right];$$

$$J_2 = \int_{h/2+h_1}^{h/2+h_1+h_2} z^2 dz = \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 \right) (h + 2h_1 + h_2) \right];$$

$$J_y = m \left[\frac{J_1 r_1}{a} + \frac{J_2 r_2}{a} \right]; \quad J_x = m \left[\frac{J_1 r_1^2}{a^2} + \frac{J_2 r_2^2}{a^2} \right].$$

Вариант IV (рис. 5).

Моменты инерции для ребра двутаврового сечения:

$$J_1 = \int_{h/2}^{h/2+h_1} z^2 dz = \frac{h_1}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 \right)^2 + \frac{h}{2} (h + h_1) \right];$$

$$J_2 = \int_{h/2+h_1}^{h/2+h_1+h_2} z^2 dz = \frac{h_2}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 \right) (h + 2h_1 + h_2) \right];$$

$$J_3 = \int_{h/2+h_1+h_2}^{h/2+h_1+h_2+h_3} z^2 dz = \frac{h_3}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \right)^2 + \left(\frac{h}{2} + h_1 + h_2 \right) (h + 2h_1 + 2h_2 + h_3) \right];$$

$$J_y = m \left[\frac{J_1 r_1}{a} + \frac{J_2 r_2}{a} + \frac{J_3 r_3}{a} \right];$$

$$J_x = m \left[\frac{J_1 r_1^2}{a^2} + \frac{J_2 r_2^2}{a^2} + \frac{J_3 r_3^2}{a^2} \right].$$

Вариант V.

Плита без ребер. $J_y = J_x = 0$.

2. Метод Л. В. Канторовича в первом приближении

Предлагаемая методика расчета таких конструкций состоит в применении метода Л. В. Канторовича для сведения задачи о минимуме функционала (1) к задаче о минимуме одномерного функционала [25, 26].

В соответствии с краевыми условиями при $y = 0$ и $y = b$ примем

$$W(x, y) = f(x) \sin^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$E_s = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a dx \int_0^b \left[d_1 (f'')^2 \sin^4 \frac{\pi y}{b} + \right.$$

$$+d_2 f^2 \cos^2 \frac{2\pi y}{b} 4 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + d_3 f'' \sin^2 \frac{\pi y}{b} \cos \frac{2\pi y}{b} 2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left. + d_4 (f')^2 \sin^2 \frac{2\pi y}{b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - 2q_1 f \sin^2 \frac{\pi y}{b} \right] dy.$$

Таким образом получим задачу о минимуме одномерного функционала:

$$E_s - \frac{E}{2(1-\mu^2)} \times$$

$$\times \int_0^a \left[a_1 (f'')^2 + a_2 f^2 + a_3 f'' f + a_4 (f')^2 - 2q_2 f \right] dx, \quad (3)$$

где

$$a_1 = 15d_1; a_2 = 80 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4; a_3 = -20 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2; a_4 =$$

$$20 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2; d_4; q_2 = 20q_1.$$

Из условия минимума функционала (3) $\delta E_s = 0$ получим уравнения равновесия в виде обыкновенных дифференциальных уравнений и естественные краевые условия при $x = 0, x = a$.

Первая вариация функционала (3) примет вид:

$$\delta E_s = \int_0^a \left[2a_1 f^{IV} + (2a_3 - 2a_4) f'' + 2a_2 f - 2q_2 \right] \delta f dx + \left. + \left[(2a_1 f'' + a_3 f) \delta f' - (2a_1 f''' + (a_3 - 2a_4) f') \delta f \right] \right|_0^a.$$

Из равенства нулю интеграла получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_1 f^{IV} + (a_3 - a_4) f'' + a_2 f = q_2. \quad (4)$$

Краевые условия свободного края при $x = 0, x = a$ примут вид:

$$2a_1 f'' + a_3 f = 0, 2a_1 f''' + (a_3 - 2a_4) f' = 0. \quad (5)$$

Краевая задача (4), (5) допускает точное решение, так как уравнение (4) — это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, для которого можно найти общее решение, а используя краевые условия (5), можно найти частное решение. Однако аналитическое выражение этого решения очень громоздкое, поэтому здесь не приводится. Если считать задачу осесимметричной, то есть принять, что в на-

правлении короткого размера плиты, вдоль оси Ox прогиб W мало изменяется, то можно принять $f''' = 0, f^{IV} = 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$a_2 f = q_2, \quad (6)$$

где

$$a_2 = 80 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(J_y + \frac{h^3}{12} \right), q_2 = 20q_1.$$

3. Численный эксперимент. Соотношение сторон плиты равно 0,15

Для анализа НДС плиты при различных видах подкрепления рассмотрим конкретные размеры плиты и ребер, материал и нагрузку. Примем $q = 10^{-2}$ МПа (240 т на всю плиту), $a = 6$ м, $b = 40$ м, $h = 0,2$ м, $E = 4 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,2$. Плита в направлении оси Oy подкреплена четырьмя одинаковыми ребрами. Ребра всех рассматриваемых видов имеют одинаковую площадь поперечного сечения $S = 0,15$ м².

В таблице для каждого варианта ребер приведены значения $J_y + \frac{h^3}{12}$ и значения прогиба в центре плиты, найденные при решении уравнения (6).

При подкреплении плиты ребрами варианта I уравнение (4) и краевые условия (5) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} 46,725 f^{IV} - 3,4678 f'' + 0,0739 f &= 0,0048, \\ 93,45 f'' - 0,6935 f &= 0, \\ 93,45 f''' - 6,242 f' &= 0. \end{aligned}$$

Точное решение этой краевой задачи дает результат $W(3, 20) = 0,06629$ м, $W(0, 20) = 0,0681$ м. Разница прогибов в центре плиты и на краю составила 2,6 %. Если же считать задачу осесимметричной, то получено $W(3, 20) = 0,06489$ м. Разница перемещений в центре пластины при рассмотрении задачи как осесимметричной и точном решении задачи составляет 2 %.

Для плиты, не подкрепленной ребрами, решение краевой задачи (4), (5) дает результат $W(3, 20) = 2,408$ м, $W(0, 20) = 3,3911$ м. Если считать задачу осесимметричной, то было получено $W(3, 20) = 2,3686$ м.

Результаты вычислений

Номер варианта	I	II	III	IV	V
Размеры ребер	$h_1 = 0,6$ м $h_2 = 0,5$ м $r_1 = 0,5$ м $r_2 = 0,3$ м	$h_1 = 0,5$ м $r_1 = 0,3$ м	$h_1 = 0,1$ м $h_2 = 0,75$ м $r_1 = 0,75$ м $r_2 = 0,1$ м	$h_1 = 0,1$ м $h_2 = 0,5$ м $h_3 = 0,1$ м $r_1 = 0,5$ м $r_2 = 0,1$ м $r_3 = 0,5$ м	-
Значение $J_y + \frac{h^3}{12}$, м ³	$24,337 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$20,67 \cdot 10^{-3}$	$27,67 \cdot 10^{-3}$	$0,667 \cdot 10^{-3}$
$W(3, 20)$, м	0,06489	0,1066	0,0764	0,05707	2,3686

Разница в решениях составляет 2 %. Таким образом, если соотношение сторон плиты a/b меньше или равно $1/5$, задачу можно считать осесимметричной. Анализируя результат расчета плиты, подкрепленной ребрами различной конфигурации, можно сделать вывод, что наибольшей жесткостью обладают ребра, имеющие двутавровое сечение. Однако и ребра коробчатого вида, имеющие более простой вид, чем двутавр, тоже обладают достаточно высокой жесткостью.

4. Метод Л. В. Канторовича во втором приближении

Для наиболее точного результата применим метод Л. В. Канторовича во втором приближении [25]. То есть примем

$$W(x, y) = f_1(x) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + f_2(x) \sin^2\left(\frac{3\pi y}{b}\right).$$

В результате для осесимметричной задачи получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$2a_4 f_1 + a_5 f_2 = 2a_{14}, \quad a_5 f_1 + 2a_6 f_2 = 2a_{15},$$

где

$$a_4 = 80 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 d_2; \quad a_6 = 80 \left(\frac{3\pi}{b}\right)^4 d_2, \quad a_5 = 0.$$

Для плиты, подкрепленной ребрами варианта I, получим $W(3, 20) = 0,06406$ м. При использовании первого приближения метода Л. В. Канторовича было получено $W(3, 20) = 0,06629$ м. Погрешность составила 3 %.

Таким образом, плита с соотношением сторон $a/b = 0,15$, когда две противоположные стороны закреплены жестко, а две другие противоположные стороны свободные, деформируется осесимметрично. Предлагаемая методика решения, основанная на методе Л. В. Канторовича, когда для расчета НДС получается краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой можно найти точное решение, является наиболее простой и дающей высокую точность. При расчете по балочной методике (при решении уравнений равновесия балки) погрешность составила около 5,5 % по сравнению с предлагаемой методикой.

5. Численный эксперимент. Соотношение сторон плиты равно 0,6

Теперь рассмотрим вариант плиты, подкрепленной теми же ребрами, когда отношение сторон $a/b = 0,6$, то есть $a = 6$ м, $b = 10$ м. В этом случае для плиты, подкрепленной ребрами варианта I, получим

$$a_1 = 46,725 \cdot 10^{-3}; \quad a_2 = 18,9625 \cdot 10^{-3};$$

$$a_3 = -10,83679 \cdot 10^{-3}; \quad a_4 = 43,34717 \cdot 10^{-3};$$

$$q_2 = 0,0048 \cdot 10^{-3}.$$

Уравнение (4) и краевые условия (5) примут вид:

$$46,725 f^{IV} - 54,18396 f'' + 18,9625 f = 0,0048;$$

$$93,45 f'' + 18,9625 f = 0;$$

$$93,45 f''' - 97,5311 f' = 0.$$

Точное решение этой краевой задачи будет следующее: $W(3, 5) = 0,000257$ м, $W(0, 5) = 0,000222$ м. Разница в прогибах в центре и на краю отрезка составила 13,6 %. Здесь уже задачу считать осесимметричной нельзя.

Используя метод Л. В. Канторовича в первом приближении, при решении уравнения (6), которое примет вид:

$$18,9625f = 0,0048,$$

получим $W(3, 5) = 0,000253$ м.

Выводы

Разработана достаточно простая, но точная методика расчета подкрепленных плит, у которых два края закреплены жестко, а два другие свободны.

Выявлено, что задачу расчета напряженно-деформированного состояния таких плит не всегда можно считать осесимметричной и при расчете использовать упрощенный вариант дифференциального уравнения. Учет дискретного расположения ребер рассматривается как перспективное направление развития изложенной методики.

Установлено, что наличие подкрепляющих плит ребер делает ее значительно более жесткой. Так, для рассмотренного частного случая (см. таблицу) при подкреплении ребрами прогиб уменьшился в 36 раз. Анализ различных вариантов ребер показал, что наибольшую жесткость при одном и том же значении площади поперечного сечения ребра дают ребра в виде двутавра. Однако также эффективны и ребра коробчатого вида.

Библиографический список

1. Корнеев М. М. Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию. Киев: ЗАТ «ВППОЛ», 2003. 547 с.
2. Байков В. Н., Дроздов П. Ф., Трифонов И. А. и др. Железобетонные конструкции. Специальный курс. 3-е изд. перераб. М.: Стройиздат, 1981. 767 с.
3. Chen W.-F., Duan L. Bridge Engineering Handbook, Second Edition: Superstructure Design. Taylor & Francis Group, 2014. 716 p.

4. Barker R. M., Puckett J. A. Design of Highway Bridges. An LRFD Approach. 3rd Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2013. 528 p.
5. Chatterjee S. The Design of Modern Steel Bridges. 2nd edition. Blackwell Science Ltd, 2003. 207 p.
6. Ильясевич С. А. Металлические коробчатые мосты. М.: Транспорт, 1970. 280 с.
7. Кононов Ю. И., Кононова М. Ю. Железобетонные и каменные конструкции. Сборное железобетонное ребристое перекрытие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. 71 с.
8. Qu Y., et al. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. Vol. 69. Pp. 72–84.
9. Телегин М. А. Особенности расчета цельнометаллических пролетных строений автодорожных мостов с учетом совместной работы ортотропной плиты с главными балками и одеждой ездового полотна: дис. ... канд. техн. наук. Омск, 2016. 213 с.
10. Беликов Г. И., Калашиников С. Ю. Оптимизация топологии подкрепленных цилиндрических оболочек мостовых конструкций при свободных колебаниях // Вестник Волгоградского гос. архит.-строит. ун-та. 2011. № 25 (44). С. 14–20.
11. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. М.: Физматлит, 2011. Ч. 1. 288 с.
12. Karpov V. V., Semenov A. A. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners // Structures. 2021. Vol. 34. Pp. 3206–3221.
13. Семенов А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек // Вестник ПНИПУ. Механика. 2022. № 4. С. 90–102.
14. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 199. Pp. 43–56.
15. Мехтиев М. А. Нелинейные параметрические колебания подкрепленной цилиндрической оболочки с вязкоупругим наполнителем // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3 (16). С. 28–30.
16. Jafari A. A., Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods // Thin-Walled Structures. 2006. Vol. 44. No. 1. Pp. 82–90.
17. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners // Advanced in Engineering Software. 1999. No. 30. Pp. 649–655.
18. Talebitooti M., Ghayour M., Zisei-Rad S., Talebitooti R. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners // Archive of Applied Mechanics. 2010. Vol. 80. No. 3. Pp. 201–215.

19. Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners // *International Journal of Solids and Structures*. 2002. No. 39. Pp. 529–545.

20. Daneshjou K., Talebitooti M., Talebitooti R., Saeidi H. Dynamic analysis and critical speed of rotating laminated conical shells with orthogonal stiffeners using generalized differential quadrature method // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 2. Pp. 349–390.

21. Tebyakin A. D., Krysko A. V., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022. Vol. 22. No. 4. Pp. 494–505.

22. Der-Chen C., Gang W., Wereley N. M. A Generalized Kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem // *Applicable Analysis*. 2001. Vol. 80. No. 3–4. Pp. 477–491.

23. Ike C. C., Mama B. O. Kantorovich variational method for the flexural analysis of CSDS Kirchhoff-Love plates // *Mathematical Models in Engineering*. 2018. Vol. 4. No. 1. Pp. 29–41.

24. Карпов В. В., Кобелев Е. А., Панин А. Н., Семенов А. А. Модели деформирования строительных конструкций и методы их расчета. М.: АСВ, 2022. 466 с.

25. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

26. Fariborz S. J., Pourbohloul A. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates // *Computers & Structures*. 1989. Vol. 31. No. 6. Pp. 957–965.

References

1. Korneev M. M. *Stal'nye mosty. Teoreticheskoe i prakticheskoe posobie po proektirovaniyu* [Steel Bridges. Theoretical and practical design manual]. Kiev, ZAT VIPOL Publ., 2003, 547 p.

2. Baykov V. N., et al. *Zhelezobetonnye konstruksii. Spetsial'nyy kurs* [Reinforced Concrete Structures. Special course]. 3-rd. ed., revised. Moscow, Stroyizdat Publ., 1981, 767 p.

3. Chen W.-F., Duan L. *Bridge engineering handbook*. 2-nd ed. In: *Superstructure Design*. Taylor & Francis Group, 2014, 716 p.

4. Barker R. M., Puckett J. A. *Design of Highway Bridges. An LRFD Approach*. 3rd ed. United States of America, John Wiley & Sons Publ., 2013, 528 p.

5. Chatterjee S. *The design of modern steel bridges*. 2nd ed. Blackwell Science Ltd Publ., 2003, 207 p.

6. Il'yasevich S. A. *Metallicheskie korobchatye mosty* [Metal box shaped bridges]. Moscow, Transport Publ., 1970, 280 p.

7. Kononov Yu. I., Kononova M. Yu. *Zhelezobetonnye i kamennye konstruksii. Sbornoe zhelezobetonnoe rebristoe perekrytie* [Reinforced concrete and stone structures. Prefabricated reinforced concrete ribbed slab]. St. Petersburg, Politekhn. un-t Publ., 2013, 71 p.

8. Qu Y., et al. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, vol. 69, pp. 72–84.

9. Telegin M. A. *Osobennosti rascheta tsel'nometallicheskih proletnykh stroeniy avtodorozhnykh mostov s uchetom sovmestnoy raboty ortotropnoy plity s glavnyimi balkami i odezhday ezdovogo polotna. Diss. kand. tekhn. nauk* [Calculation features of all-metal spanning structures of highway bridges taking into account the joint work of orthotropic slab with the main beams and clothing of the roadbed. PhD in Sci. Tech. diss.]. Omsk, 2016, 213 p.

10. Belikov G. I., Kalashnikov S. Yu. *Optimizatsiya topologii podkreplennykh tsilindricheskikh obolochek mostovykh konstruksiy pri svobodnykh kolebaniyakh* [Optimization of the topology of reinforced cylindrical shells of bridge structures under free vibrations]. *Vestnik Volgogradskogo gos. arkhitekt.-stroit. un-ta – Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering*, 2011, no. 25 (44), pp. 14–20.

11. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of reinforced shells of rotation]. In 2 pts. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, pt. 1, 288 p.

12. Karpov V. V., Semenov A. A. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners. *Structures*, 2021, vol. 34, pp. 3206–3221.

13. Semenov A. A. *Utochnenniy diskretniy metod rascheta podkreplennykh ortotropnykh obolochek* [Refined discrete method of calculation of reinforced orthotropic shells]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – Bulletin of PNIPU*, 2022, no. 4, pp. 90–102.

14. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 199, pp. 43–56.

15. Mekhtiev M. A. *Nelineynnye parametricheskie kolebaniya podkreplennoy tsilindricheskoy obolochki s vyazkouprugim napolnitelem* [Nonlinear parametric oscillations of a reinforced cylindrical shell with viscoelastic filler]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2011, no. 3 (16), pp. 28–30.

16. Jafari A. A., Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical,

experimental and numerical methods. *Thin-Walled Structures*, 2006, vol. 44, no. 1, pp. 82–90.

17. Lee Y.-S., Kim Y.-W. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners. *Advanced in Engineering Software*, 1999, no. 30, pp. 649–655.

18. Talebitooti M., Ghayour M., Zisei-Rad S., Talebitooti R. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, vol. 80, no. 3, pp. 201–215.

19. Zhao X., Liew K. M., Ng T. Y. Vibrations of rotating cross-ply laminated circular cylindrical shells with stringer and ring stiffeners. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, no. 39, pp. 529–545.

20. Daneshjou K., Talebitooti M., Talebitooti R., Saeidi H. Dynamic analysis and critical speed of rotating laminated conical shells with orthogonal stiffeners using generalized differential quadrature method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 349–390.

21. Tebyakin A. D., Krysko A. V., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich

method). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, no. 4, pp. 494–505.

22. Der-Chen C., Gang W., Wereley N. M. A generalized Kantorovich method and its application to free in-plane plate vibration problem. *Applicable Analysis*, 2001, vol. 80, no. 3–4, pp. 477–491.

23. Ike C. C., Mama B. O. Kantorovich variational method for the flexural analysis of CSCS Kirchhoff-Love plates. *Mathematical Models in Engineering*, 2018, vol. 4, no. 1, pp. 29–41.

24. Karpov V. V., Kobelev E. A., Panin A. N., Semenov A. A. *Modeli deformirovaniya stroitel'nykh konstruksiy i metody ikh rascheta* [Models of deformation of building structures and methods of their calculation]. Moscow, ASV Publ., 2022, 466 p.

25. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. 5-th. ed. Moscow, Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1962, 708 p.

26. Fariborz S. J., Pourbohloul A. Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates. *Computers & Structures*, 1989, vol. 31, no. 6, pp. 957–965.