

УДК 624.074.43+539.3

© А. А. Семенов, д-р техн. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: sw.semenov@gmail.com

DOI 10.23968/1999-5571-2024-21-5-41-48

© A. A. Semenov, Dr. Sci. Tech., Associate Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: sw.semenov@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ РАЗЛИЧНОГО ВИДА*

SIMULATION OF DEFORMATION OF THIN-WALLED SHELL STRUCTURES UNDER DYNAMIC LOADS OF VARIOUS TYPES

В статье представлено развитие методов и моделей расчета тонкостенных оболочек на новые (в контексте рассматриваемого подхода) виды динамических воздействий, важные для обеспечения безопасной работы конструкций. Рассматриваются нагрузка, линейно зависящая от времени, периодическое воздействие и взрывная нагрузка. Модифицирована геометрически нелинейная математическая модель, учитывающая ортотропию материала и поперечные сдвиги. Вычислительный алгоритм основан на применении метода Л. В. Канторовича и метода Розенброка для решения жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Использована среда аналитических вычислений Maple. Пригодность предложенного подхода показана на примере расчета пологой оболочки двойной кривизны при разных вариантах нагружения.

Ключевые слова: оболочки, динамическое нагружение, геометрическая нелинейность, математическая модель, метод Канторовича.

The paper presents the development of methods and models for calculating thin-walled shells for new (in the context of the approach under consideration) types of dynamic effects important for ensuring safe operation of structures. The author considers the load linearly dependent on time, periodic action and explosive load. The geometrically nonlinear mathematical model is modified, taking into account the orthotropy of the material and transverse shears. The computational algorithm is based on using the L. V. Kantorovich method and the Rosenbrock method for solving a rigid system of ordinary differential equations. The Maple analytical computing environment is used. The applicability of the proposed approach is shown by the example of calculating a shallow shell of double curvature under different loading options.

Keywords: shells, dynamic loading, geometric nonlinearity, mathematical model, Kantorovich method.

Введение

Для множества прикладных задач моделирование процесса деформирования тонкостенных оболочечных конструкций имеет большое значение [1–4]. В зависимости от свойств материала конструкции и видов

внешнего воздействия оболочки исследуются в соответствии с разными математическими моделями. Постоянное развитие вычислительной техники позволяет разрабатывать все более точные модели деформирования оболочечных конструкций и получать результаты их расчета за приемлемое время [5, 6].

¹ Статья публикуется по результатам исполнения гранта СПбГАСУ 2024 года.

Одной из сложных для вычисления задач в данной области является анализ устойчивости оболочечной конструкции при динамическом нагружении, поскольку при потере устойчивости система обыкновенных дифференциальных уравнений становится жесткой, и ее решение требует применения специальных численных методов и существенно больших вычислительных мощностей [7–9].

Динамическое нагружение может быть разных видов, например, ударная нагрузка [10–12] или периодическое воздействие [13–15]. Процессы, возникающие в ортотропной оболочечной конструкции при таких нагрузках, изучены пока еще недостаточно.

В статье [7] рассматривается динамическое поведение цилиндрических оболочек, используемых в качестве вертикальных резервуаров для хранения нефти, под действием взрывных нагрузок. Используется метод конечных элементов. Показано, что наиболее существенно поведение оболочек рассматриваемого вида зависит от их толщины и в незначительной степени — от их высоты и диаметра.

Р. А. Каюмовым и Б. Ф. Тазюковым [9] исследуется вопрос развития трещин в оболочечной конструкции при действии циклической нагрузки, исследуются оболочки из малоуглеродистой или низколегированной стали.

V. Keshav и др. [13] выполнен нелинейный анализ потери устойчивости при импульсном нагружении для композитной цилиндрической панели с различными формами вырезов. Используется метод конечных элементов и критерий Цая–Ву для анализа состояния конструкции.

В области классификации и описания динамических нагружений конструкций следует отметить значимую работу Н. Н. Попова и др. [16], где подробно описаны разные виды воздействий.

Целью данной работы является развитие методов и моделей расчета тонкостенных

ортотропных оболочек на новые виды динамических воздействий, важные для обеспечения безопасной работы конструкций.

1. Теория и методы

1.1. Математическая модель деформирования оболочки

Математическую модель доформирования оболочечной конструкции будем формировать в виде функционала полной энергии деформации. Для этого потребуются соотношения, связывающие перемещения и деформации [17]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2; \\ \theta_1 &= -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right); \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right); \\ k_x &= \frac{1}{R_1}; k_y = \frac{1}{R_2}; \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y; \\ \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x; \end{aligned} \quad (1)$$

$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x \right)$, а также соотношения, связывающие напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right); \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right); \\ \tau_{xy} &= G_{12} (\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}); \\ \tau_{xz} &= G_{13} k_f(z) (\Psi_x - \theta_1); \\ \tau_{yz} &= G_{23} k_f(z) (\Psi_y - \theta_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$U = U(x, y, t); V = V(x, y, t); W = W(x, y, t);$
 $\Psi_x = \Psi_x(x, y, t); \Psi_y = \Psi_y(x, y, t)$ — неизвестные функции перемещений и углов поворота нормалей в плоскостях xOz и yOz соответственно; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — деформации удлинения

вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ — деформации сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей x и y , характеризующие ее геометрию; A, B — параметры Ляме; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ — функции изменения кривизн и кручения.

Полная энергия деформации оболочечной конструкции может быть записана с помощью функционала [17]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt, \quad (3)$$

где E_k — кинетическая энергия деформации системы; $E_s = E_p - A$ — функционал статической задачи, равный разности потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил. Кинетическая энергия будет равна

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dy dx, \quad (4)$$

где ρ — плотность материала; h — толщина обшивки; работа внешних сил

$$A = \int_{a_1}^a \int_0^b (P_x U + P_y V + qW) AB dx dy. \quad (5)$$

1.2. Динамическое нагружение

Если нагрузка направлена по нормали к срединной поверхности обшивки, то тогда

$$P_x = P_{xsv}; \quad P_y = P_{ysv};$$

$$q = q_t \left(q_{10} + q_{11}x + q_{12}x^2 \right) \left(q_{20} + q_{21}y + q_{22}y^2 \right) + q_{sv},$$

где q_t — закон нагружения в зависимости от переменной времени; P_{xsv}, P_{ysv}, q_{sv} — компоненты нагрузки от собственного веса. Коэффициенты $q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{20}, q_{21}, q_{22}$ задают закон изменения поперечной компоненты нагрузки в зависимости от координат x, y . Например, возможно равномерно распределенное воздействие, возрастание или убывание по линейному закону либо по параболе и др. Могут быть использованы и любые другие варианты, которые здесь не рассматриваются.

Рассмотрим возможные виды прикладываемых нагрузок с точки зрения их изменения во времени. Ранее автором было детально исследовано деформирование конструкций, когда изменение нагрузки происходит по линейному закону (здесь A_1 — скорость нагружения):

$$q_t = q_t(t) = A_1 t.$$

Однако могут встречаться и другие виды. Например, в фундаментальной работе А. С. Вольмира [18] выделяются такие (с учетом обозначений, принятых здесь), как показано на рис. 1. Первый вариант соответствует закону нагружения, указанному выше, то есть $q_t = \tan \alpha \cdot t = A_1 t$.

Процесс потери устойчивости («прохлопывания») конструкции происходит на восходящем участке диаграммы нагружения, однако возможен и на нисходящем. А. С. Вольмиром отмечается, что с увеличением скорости нагружения эффект запаздывания усиливается [18].

Часто исследуемым воздействием на конструкцию является периодическое воздействие

$$q_t(t) = q_0 \sin \omega_0 t.$$

В случае совпадения частоты ω_0 с собственной частотой конструкции возникает явление резонанса, что является наиболее опасным.

Взрывная же нагрузка во многом определяется исходя из параметров источника взрыва, ударной волны, среды распространения и т. д. Например, если источник взрыва достаточно удален от конструкции, нагрузку можно описать с помощью уравнения экспоненциального затухания Фридлиндера [19], используемого также в работах [7, 20, 21]:

$$q_t(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right) \exp \left(-k_2 \frac{t}{t_0} \right).$$

Здесь q_0 — значение пикового давления; t_0 — время действия волны; k_2 — параметр формы волны.

В ряде работ также предлагается использовать более простые формулировки, отчасти похожие на указанную выше [16, 22]:

$$q_t(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{t_0} \right), \quad q_t(t) = q_0 \exp \left(-\frac{t}{t_0} \right).$$

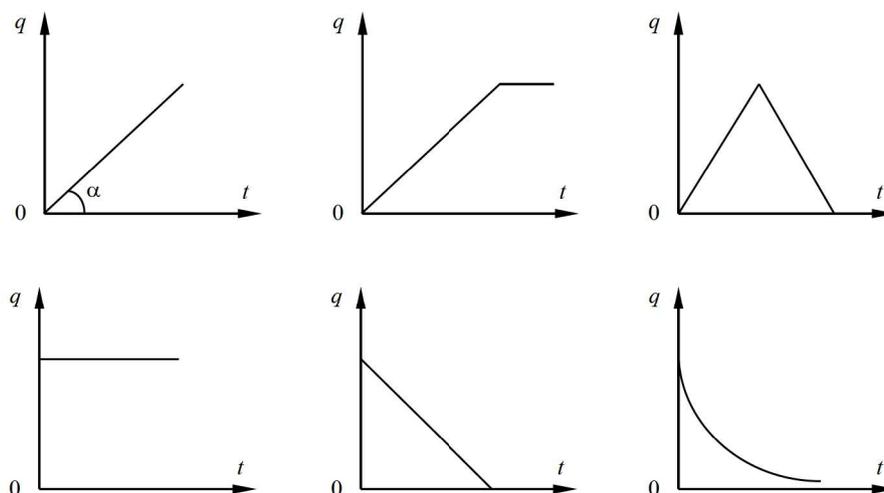


Рис. 1. Виды динамического нагружения [18]

1.3. Численные методы

Далее для осуществления расчетов будут использованы метод Л. В. Канторовича и метод Розенброка (для численного решения жестких систем ОДУ). Метод Л. В. Канторовича используется для приведения многомерного функционала к одномерному. Для этого неизвестные функции перемещений и углов поворота нормали представляются в следующем виде [17]:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl}(t) X_1^k Y_1^l; \\
 V(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl}(t) X_2^k Y_2^l; \\
 W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl}(t) X_3^k Y_3^l; \\
 \Psi_x(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl}(t) X_4^k Y_4^l; \\
 \Psi_y(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl}(t) X_5^k Y_5^l,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $U_{kl} - \Psi_{ykl}$ — неизвестные функции переменной t ; $X_1^k, \dots, X_5^k, Y_1^l, \dots, Y_5^l$ — известные аппроксимирующие функции.

2. Расчеты

Выполним расчет полой оболочки двоякой кривизны при разных вариантах ди-

намического нагружения. Параметры конструкции возьмем следующими: $h = 0,09$ м, $a = b = 10,8$ м; $R_1 = R_2 = 40,05$ м. Материал — сталь С345 ($E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³), закрепление контура — шарнирно-неподвижное, распределение нагрузки — по нормали к поверхности, собственный вес учитывается. Расчеты выполняются при $N = 9$ в (6). Диссипация энергии не учитывается.

Рассмотрим три варианта закона нагружения. Для каждого случая покажем графики зависимости «нагрузка q – перемещение W », «время t – перемещение W », «перемещение W – скорость перемещения $\partial W/\partial t$ » (фазовый портрет) (рис. 2–4). Красными кривыми показаны перемещения в центральной точке (то есть при $x = a/2$; $y = b/2$), синими — в точке четверти ($x = a/4$; $y = b/4$).

1. Нагрузка, линейно зависящая от времени: $q = A_1 t + q_{sv}$; $A_1 = 10$ МПа/с.

2. Периодическое воздействие $q = q_0 \sin \omega_0 t + q_{sv}$; $q_0 = 10$ МПа; $\omega_0 = 130$ рад/с.

Показать в данном случае график зависимости «нагрузка q – перемещение W » не представляется возможным, так как происходит многократное перекрытие кривых из-за периодичности процесса.

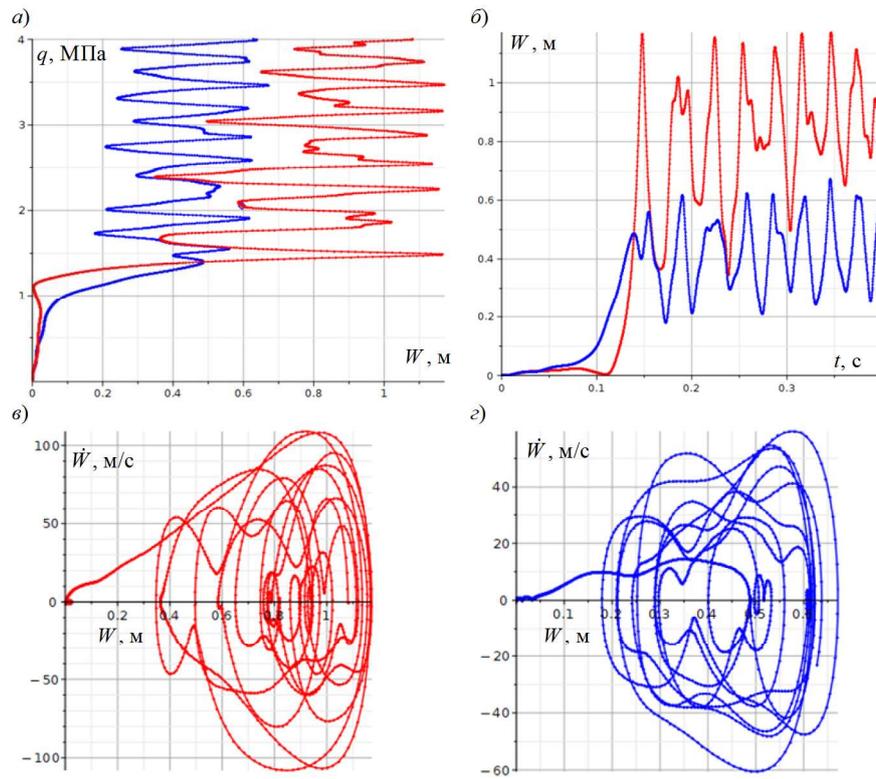


Рис. 2. Результаты при варианте нагрузки, линейно зависящей от времени

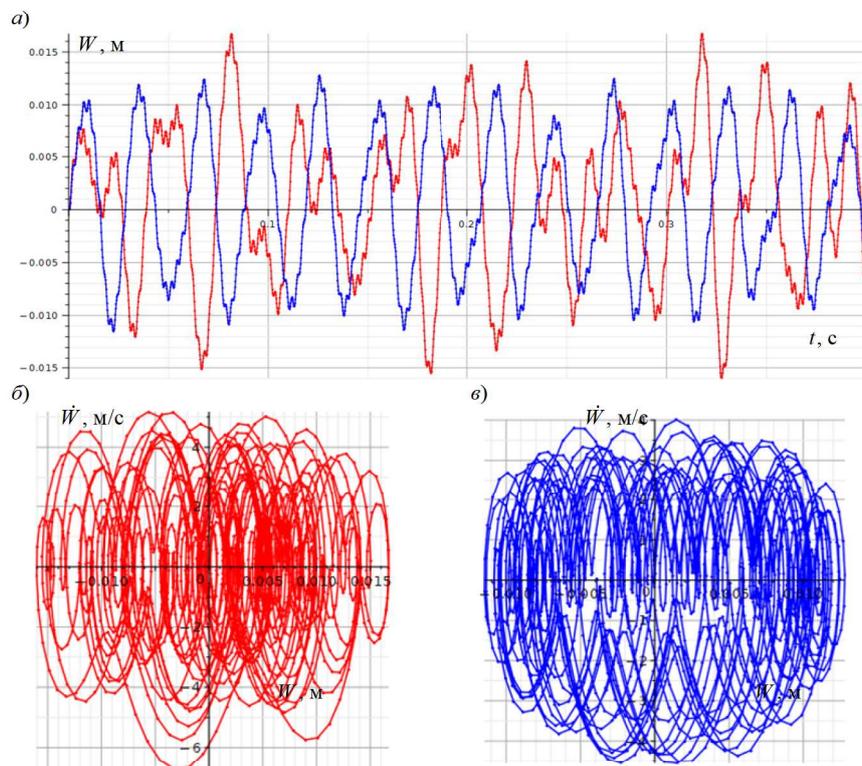


Рис. 3. Результаты при периодическом воздействии на оболочку

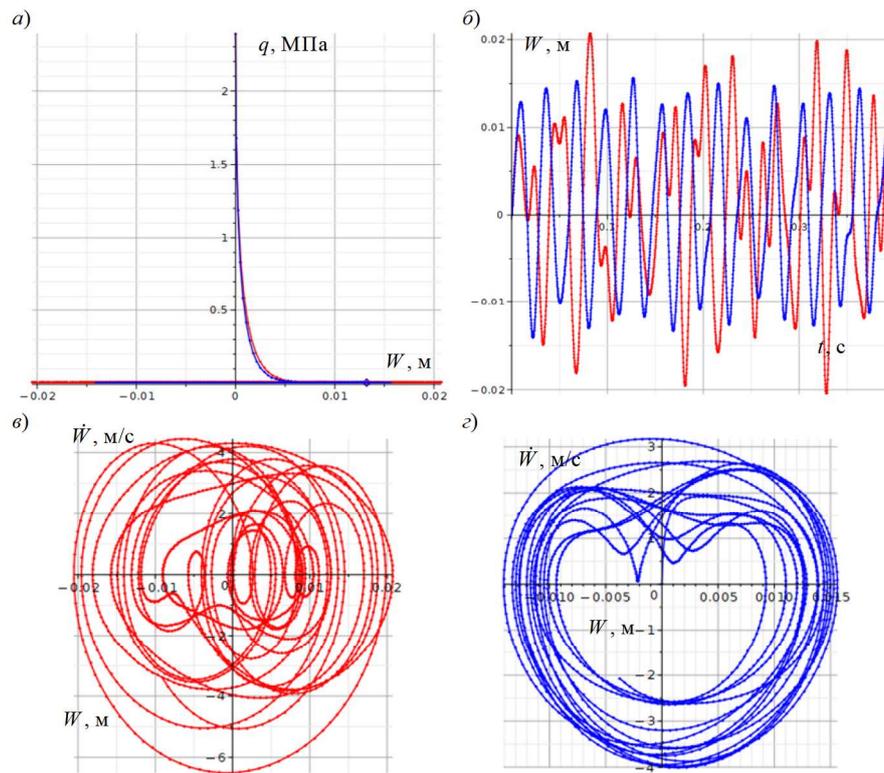


Рис. 4. Результаты при воздействии взрывной нагрузки

3. Взрывная нагрузка $q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) + q_{sv}$; $q_0 = 10$ МПа; $t_0 = 0,01$ с.

Заключение

Расчеты показали, что все рассмотренные виды нагружения приводят к колебательно-му процессу, который носит существенно нелинейный характер. Важным является тот факт, что в разных точках конструкции колебания могут совершаться в противофазе, что повышает риск достижения предельно допустимых значений напряжений.

Полученные результаты позволяют расширить применимость разработанных моделей и алгоритмов расчета на более широкий класс задач и подготовить основу для дальнейших исследований.

Библиографический список

1. Бадриев И. Б., Макаров М. В., Паймушин В. Н., Холмогоров С. А. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с кон-

турными подкрепляющими стержнями // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2017. Т. 159, № 4. С. 395–428. EDN: YWJLRZ.

2. Петров В. В., Мищенко Р. В., Пименов Д. А., Горбачева О. А. Математическое моделирование долговечности тонкостенных пространственных конструкций взаимодействующих с агрессивной средой // Эксперт: теория и практика. 2020. № 6 (9). С. 14–30. DOI 10.24411/2686-7818-2020-10052. EDN: ASQBRG.

3. Krivoshapko S. N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17, № 6. С. 553–561. DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561. EDN: EUZAXG.

4. Damir H. Yo., Rynkovskaya M., Sereke I. A. Comparative Buckling Analysis of Concrete and Expanded Polystyrene Dome Shells // Architecture and Engineering. 2024. Vol. 9. No. 1. Pp. 71–78. DOI 10.23968/2500-0055-2024-9-1-71-78. EDN: BQIUW.

5. Карпов В. В. Компьютерные технологии расчета покрытий строительных сооружений оболочечного типа // Вестник гражданских инженеров. 2005. № 1 (2). С. 17–24. EDN: KVUPFD.

6. Постнов В. А., Тумашик Г. А., Москвина И. В. Об устойчивости подкрепленной цилиндрической обо-

лочки // Проблемы прочности и пластичности. 2007. № 69. С. 18–23. EDN: KGBROB.

7. Godoy L. A., Ameijeiras M. P. Plastic buckling of oil storage tanks under blast loads // Structures. 2023. Vol. 53. Pp. 361–372. DOI 10.1016/j.istruc.2023.04.057. EDN: YXCDOO.

8. Sokolov V., Razov I. Free Oscillations of Semi-underground Trunk Thin-Wall Oil Pipelines of Big Diameter // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 982. Pp. 615–627. DOI 10.1007/978-3-030-19756-8_58. EDN: YMJVBJ.

9. Каюмов Р. А., Тазюков Б. Ф. Расчет цилиндрической оболочки на циклическую прочность // Вестник Казанского технологического ун-та. 2012. Т. 15, № 9. С. 162–164. EDN: OYMDXX.

10. Баженов В. Г., Баранова М. С., Кибец А. И., Ломунов В. К., Павленкова Е. В. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105. EDN: NPULVB.

11. Wei Z. G., Yu J. L., Batra R. C. Dynamic buckling of thin cylindrical shells under axial impact // International Journal of Impact Engineering. 2005. Vol. 32. No. 1–4. Pp. 575–592. DOI 10.1016/j.ijimpeng.2005.07.008.

12. Zhang J., Li S. Dynamic buckling of FGM truncated conical shells subjected to non-uniform normal impact load // Composite Structures. 2010. Vol. 92. No. 12. Pp. 2979–2983. DOI 10.1016/j.compstruct.2010.05.009. EDN: NXBWTV.

13. Keshav V., Patel S. N., Kumar R., Watts G. Effect of Cutout on the Stability and Failure of Laminated Composite Cylindrical Panels Subjected to In-Plane Pulse Loads // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2022. Vol. 22. No. 08. 2250087. DOI 10.1142/S0219455422500870. EDN: KMAPCM.

14. Dey T., Jansen E., Kumar R., Rolfes R. Instability characteristics of variable stiffness laminated composite curved panels under non-uniform periodic excitation // Thin-Walled Structures. 2022. Vol. 171. 108735. DOI 10.1016/j.tws.2021.108735. EDN: MMYJJB.

15. Phu K. V., Bich D. H., Doan L. X. Nonlinear Forced Vibration and Dynamic Buckling Analysis for Functionally Graded Cylindrical Shells with Variable Thickness Subjected to Mechanical Load // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering. 2022. Vol. 46. Pp. 649–665. DOI 10.1007/s40997-021-00429-1. EDN: WBYPFF.

16. Попов Н. Н., Распорзев Б. С., Забегаев А. В. Расчет конструкций на динамические и специальные нагрузки. М.: Высшая школа, 1992. 319 с.

17. Semenov A. A. Dynamic buckling analysis of doubly curved orthotropic shallow shells via the Kantorovich and

Rosenbrock methods // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2024. Vol. 46. P. 410. DOI 10.1007/s40430-024-04966-z. EDN: HIGQHN.

18. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

19. Gupta A. D., Gregory F. H., Bitting R. L., Bhattacharya S. Dynamic analysis of an explosively loaded hinged rectangular plate // Computers & Structures. 1987. Vol. 26, No. 1–2. Pp. 339–344. DOI 10.1016/0045-7949(87)90263-X.

20. Kazancı Z., Mecitoğlu Z. Nonlinear dynamic behavior of simply supported laminated composite plates subjected to blast load // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317. No. 3–5. Pp. 883–897. DOI 10.1016/j.jsv.2008.03.033.

21. Türkmen H. S. Structural Response of Laminated Composite Shells Subjected to Blast Loading: Comparison of Experimental and Theoretical Methods // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 249. No. 4. Pp. 663–678. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3861.

22. Sirivolu D., Hoo Fatt M. S. Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 77. Pp. 281–290. DOI 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.005.

References

1. Badriev I. B., Makarov M. V., Paymushin V. N., Kholmogorov S. A. *Osesimmetrichnye zadachi o geometricheski nelineynom deformirovanii i ustoychivosti trekhslonnoy tsilindricheskoy obolochki s konturnymi podkreplyayushchimi sterzhnyami* [Axisymmetric problems on geometrically nonlinear deformation and stability of a three-layer cylindrical shell with contour reinforcing rods]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 395–428. EDN: YWJLRZ.

2. Petrov V. V., Mishchenko R. V., Pimenov D. A., Gorbacheva O. A. *Matematicheskoe modelirovanie dolgovechnosti tonkostennykh prostranstvennykh konstruksiy vzaimodeystvuyushchikh s agressivnoy sredoy* [Mathematical modeling of durability of thin-walled spatial structures interacting with aggressive medium]. *Ekspert: teoriya i praktika – Expert: Theory and Practice*, 2020, no. 6 (9), pp. 14–30. DOI 10.24411/2686-7818-2020-10052. EDN: ASQBRG.

3. Krivoschapko S. N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction Mechanics of Engineering Constructions and Structures*, 2021, vol. 17, no. 6, pp. 553–561. DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561. EDN: EUZAXG.

4. Damir H. Yo., Rynkovskaya M., Sereke I. A. Comparative Buckling Analysis of Concrete and Expanded Polystyrene Dome Shells. *Architecture and Engineering* 2024, vol. 9, no. 1, pp. 71–78. DOI 10.23968/2500-0055-2024-9-1-71-78. EDN: BQIIUW.
5. Karpov V. V. *Komp'yuternye tekhnologii rascheta pokrytiy stroitel'nykh sooruzheniy obolochchnogo tipa* [Computer technologies of calculation of coverings of shell-type building structures]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2005, no. 1 (2), pp. 17–24. EDN: KVUPFD.
6. Postnov V. A., Tumashik G. A., Moskvina I. V. *Ob ustoychivosti podkrepennoy tsilindricheskoy obolochki* [Regarding the stability of a reinforced cylindrical shell]. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2007, no. 69, pp. 18–23. EDN: KGBROB.
7. Godoy L. A., Ameijeiras M. P. Plastic buckling of oil storage tanks under blast loads. *Structures*, 2023, vol. 53, pp. 361–372. DOI 10.1016/j.istruc.2023.04.057. EDN: YXCDOO.
8. Sokolov V., Razov I. Free Oscillations of Semi-underground Trunk Thin-Wall Oil Pipelines of Big Diameter. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2020, vol. 982, pp. 615–627. DOI 10.1007/978-3-030-19756-8_58. EDN: YMJVBJ.
9. Kayumov R. A., Tazyukov B. F. *Raschet tsilindricheskoy obolochki na tsiklicheskiyuy prochnost'* [Calculation of a cylindrical shell for cyclic strength]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo un-ta – Bulletin of Kazan Technological University*, 2012, vol. 15, no. 9, pp. 162–164. EDN: OYMDDX.
10. Bazhenov V. G., Baranova M. S., Kibets A. I., Lomunov V. K., Pavlenkova E. V. *Vypuchivanie uprugoplasticheskikh tsilindricheskikh i konicheskikh obolochek pri osevom udarnom nagruzhenii* [Bulging of Elastoplastic Cylindrical and Conical Shells under Axial Shock Loading]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2010, vol. 152, no. 4, pp. 86–105. EDN: NPULEB.
11. Wei Z. G., Yu J. L., Batra R. C. Dynamic buckling of thin cylindrical shells under axial impact. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, vol. 32, no. 1–4, pp. 575–592. DOI 10.1016/j.ijimpeng.2005.07.008.
12. Zhang J., Li S. Dynamic buckling of FGM truncated conical shells subjected to non-uniform normal impact load. *Composite Structures*, 2010, vol. 92, no. 12, pp. 2979–2983. DOI 10.1016/j.compstruct.2010.05.009. EDN: NXBWTV.
13. Keshav V., Patel S. N., Kumar R., Watts G. Effect of Cutout on the Stability and Failure of Laminated Composite Cylindrical Panels Subjected to In-Plane Pulse Loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, vol. 22, no. 08, 2250087. DOI 10.1142/S0219455422500870. EDN: KMAPCM.
14. Dey T., Jansen E., Kumar R., Rolfes R. Instability characteristics of variable stiffness laminated composite curved panels under non-uniform periodic excitation. *Thin-Walled Structures*, 2022, vol. 171, 108735. DOI 10.1016/j.tws.2021.108735. EDN: MMYJJB.
15. Phu K. V., Bich D. H., Doan L. X. Nonlinear Forced Vibration and Dynamic Buckling Analysis for Functionally Graded Cylindrical Shells with Variable Thickness Subjected to Mechanical Load. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2022, vol. 46, pp. 649–665. DOI 10.1007/s40997-021-00429-1. EDN: WBYPFF.
16. Popov N. N., Rastorguev B. S., Zabegaev A. V. *Raschet konstruksiy na dinamicheskie i spetsial'nye nagruzki* [Calculation of constructions for dynamic and special loads]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1992, 319 p.
17. Semenov A. A. Dynamic buckling analysis of doubly curved orthotropic shallow shells via the Kantorovich and Rosenbrock methods. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2024, vol. 46, 410. DOI 10.1007/s40430-024-04966-z. EDN: HIGQHN.
18. Vol'mir A. S. *Nelineynaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 432 p.
19. Gupta A. D., Gregory F. H., Bittling R. L., Bhattacharya S. Dynamic analysis of an explosively loaded hinged rectangular plate. *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 339–344. DOI 10.1016/0045-7949(87)90263-X.
20. Kazancı Z., Mecitoğlu Z. Nonlinear dynamic behavior of simply supported laminated composite plates subjected to blast load. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 317, no. 3–5, pp. 883–897. DOI 10.1016/j.jsv.2008.03.033.
21. Türkmen H. S. Structural Response of Laminated Composite Shells Subjected to Blast Loading: Comparison of Experimental and Theoretical Methods. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol. 249, no. 4, pp. 663–678. DOI 10.1006/jsvi.2001.3861.
22. Sirivolu D., Hoo Fatt M. S. Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 77, pp. 281–290. DOI 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.005.