

# Строительная механика и расчет сооружений

УДК 69.04

DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-1-43-52

© П. А. Бакусов, старший преподаватель  
(Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: bakusovpavel@gmail.com

© И. В. Каменев, канд. техн. наук

(Ленинградский областной филиал  
Санкт-Петербургского университета МВД России,  
г. Мурино, Россия)

E-mail: ivan.v.kamenev@gmail.com

© P. A. Bakusov, senior lecturer  
(Saint Petersburg State University  
of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russia)

E-mail: bakusovpavel@gmail.com

© I. V. Kamenev, PhD in Sci. Tech.

(Leningrad Regional Branch of St. Petersburg University  
of the Ministry of Internal Affairs of Russia,  
Murino, Russia)

E-mail: ivan.v.kamenev@gmail.com

## АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛИТЫ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ ПРИ ЕГО РАЗЛОЖЕНИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ РЯДЫ

### ANALYZING THE ACCURACY OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF PLATE DEFORMATION BY NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS AT ITS DECOMPOSITION INTO TRIGONOMETRIC AND POLYNOMIAL SERIES

Рассматривается вопрос точности приближённых решений, получаемых с помощью численно-аналитических методов, а именно метода Ритца (используемого для решения вариационной задачи) и метода Бубнова–Галёркина (применяемого для решения дифференциальных уравнений). Данные методы предполагают разложение приближённого решения в ряды по полным линейно независимым системам. В качестве таких систем в работе сравниваются два часто применяемых подхода: тригонометрический и полиномиальный базисы. Для оценки точности полученных решений используется невязка. В качестве примера, на котором показываются наблюдаемые эффекты, используется математическая модель изгиба пластины Софи Жермен–Лагранжа в вариационной постановке и в виде дифференциального уравнения равновесия.

*Ключевые слова:* пластина Софи Жермен–Лагранжа, метод Ритца, метод Бубнова–Галёркина, сходимость, невязка, тригонометрическая аппроксимация, полиномиальная аппроксимация.

The article deals with the accuracy of approximate solutions obtained using numerical and analytical methods, namely the Ritz method (used to solve the variational problem) and the Bubnov - Galerkin method (used to solve differential equations). These methods assume the decomposition of the approximate solution into series over complete linearly independent systems. As such systems, this paper compares two commonly used approaches: trigonometric and polynomial bases. A discrepancy is used to evaluate the accuracy of the solutions obtained. The mathematical model of plate bending Sophie Germain-Lagrange in the variational formulation and in the form of a differential equation of equilibrium is used as an example to show the observed effects.

*Keywords:* Sophie Germain-Lagrange plate, Ritz method, Bubnov- Galerkin method, convergence, discrepancy, trigonometric approximation, polynomial approximation.

#### Введение

В современном строительстве основой проектирования является расчёт напряжённо-

но-деформированного состояния (НДС) элементов строительных конструкций. Наиболее распространённым методом такого рас-

чёта, несомненно, является метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий работать и со сложной геометрией конструкций, и с совместными расчётами (например, грунты основания — надземная часть), решать контактные задачи и многое другое. Однако этот метод, как и любой другой, имеет свои ограничения, поэтому представляют практический интерес и другие приближённые методы расчёта.

Любой метод приближённого решения задачи имеет погрешность, а также определённый вид и скорость сходимости. Оценки этих параметров дают понимание, насколько точными являются полученные значения, на всей ли рассматриваемой области решение имеет достаточную точность.

Обычно по виду представления искомого решения приближённые методы разделяют на численные (или сеточные) методы, к которым относятся МКЭ [1–3] и метод конечных разностей (МКР) [4], и численно-аналитические: метод Ритца [5, 6] и метод Бубнова–Галёркина [7]. Численные методы в своей основе предлагают разбить рассматриваемую область на конечное число подобластей и искать решение в виде набора значений в узлах заданной сетки, численно-аналитические — разложить искомое решение в ряд по некоторому базису и подобрать коэффициенты разложения так, чтобы получаемая аппроксимация была как можно ближе к точному решению. В данной статье будет рассмотрена вторая группа методов.

Целью представленной работы является анализ сходимости численно-аналитических методов интегрально (отслеживание сходимости одного параметра) и поточечно (построением изополей невязки в каждой точке рассматриваемой области) на примере модели пластины Софи Жермен–Лагранжа.

### Методы

В качестве примера, на котором будет показана работа численно-аналитических методов, рассмотрим математическую модель

пластины Софи Жермен–Лагранжа [8–11]. Эта модель имеет два эквивалентных представления: в виде вариационной задачи на поиск минимума функционала полной энергии деформации и уравнения равновесия в случае статической постановки.

Вариационная постановка:

$$E_s [w] = \frac{1}{2} D \iint_{\Omega} (\chi_x^2 + 2\mu\chi_x\chi_y + \chi_y^2 + 2(1-\mu)\chi_{xy}^2) d\Omega - \iint_{\Omega} q w d\Omega \rightarrow \min.$$

Уравнение равновесия:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0.$$

В уравнениях были использованы следующие обозначения:  $w(x, y)$  — неизвестная функция перемещения точек срединной поверхности пластины вдоль оси  $z$  (функция прогиба);  $q$  — полезная нагрузка;  $D$  — цилиндрическая жёсткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина пластины;  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  — функции изменения кривизны и кручения:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Поскольку задачу на изгиб пластины в элементарных функциях не разрешить, необходимо прибегать к приближённым методам. В качестве таковых можно рассматривать метод Ритца (для решения вариационной задачи) и метод Бубнова–Галёркина (для решения дифференциальных уравнений и их систем). Оба этих проекционных метода предполагают представление искомого решения  $w(x, y)$  в виде разложения по некоторой полной линейно независимой системе:

$$\hat{w}^n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y),$$

где  $\hat{w}^n(x, y)$  — приближённое решение;  $\varphi_i(x, y)$  — известные базисные функции, которые должны удовлетворять краевым условиям задачи;  $c_i$  — искомые весовые коэффициенты.

Для оценки точности полученного приближённого решения можно использовать функцию невязки, имеющую вид

$$R_d(x, y) = D \left( \frac{\partial^4 \hat{w}^n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \hat{w}^n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}^n}{\partial y^4} \right) - q.$$

Невязка представляет собой подстановку полученного приближённого решения  $\hat{w}^n(x, y)$  в оператор дифференциального уравнения. Если невязка равна нулю, то полученное решение является точным.

По невязке можно судить о сходимости последовательности получаемых решений. Для этого можно, во-первых, следить за значением общей невязки, т. е. за значением

$$R_d^\Sigma = \int_{\Omega} R_d(x, y) d\Omega, \text{ или } \tilde{R}_d^\Sigma = \sqrt{\int_{\Omega} R_d^2(x, y) d\Omega},$$

где  $\Omega$  — рассматриваемая область. Если это значение стремится к нулю, то метод имеет сходимость хотя бы в пространстве  $L^2(\Omega)$ , т. е. среднеквадратичную. Результаты, полученные для вариантов расчёта  $R_d^\Sigma$  и  $\tilde{R}_d^\Sigma$ , будут различны. В первом случае происходит суммирование всех значений невязки по области, из-за чего может сложиться ситуация, когда результат равен нулю из-за осцилляции невязки около нуля, причём положительные значения будут компенсировать отрицательные. Во втором случае представлена формула метрики в пространстве Лебега, которая по определению неотрицательна и может быть равна нулю только в случае совпадения приближённого решения с точным.

Во-вторых, необходимо следить за изменением её значения на всей области: во всех ли точках наблюдается сходимость (имеется ли равномерная или поточечная сходимость) или же имеются проблемные области, в которых приближённое решение не даёт необходимой точности решения.

Основная проблема при работе с проекционными методами — это подбор базисных функций, которые бы удовлетворяли краевым условиям. Обычно, если область  $\Omega$  — пря-

моугольная, т. е.  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , то приближённое решение представляют в виде произведения одномерных базисных функций:

$$\hat{w}^N(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \varphi_i^x(x) \varphi_j^y(y),$$

где  $\varphi_i^x(x)$  должна удовлетворять краевым условиям по оси  $x$ , а  $\varphi_j^y(y)$  — по оси  $y$ ;  $N = n \cdot m$ .

Например, если рассматривается случай шарнирно-неподвижного закрепления пластины по краю, то должны соблюдаться условия:

$$\begin{aligned} \varphi_i^x \Big|_{x=0} &= \varphi_i^x \Big|_{x=a} = 0, \frac{\partial^2 \varphi_i^x}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 \varphi_i^x}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0; \\ \varphi_j^y \Big|_{y=0} &= \varphi_j^y \Big|_{y=b} = 0, \frac{\partial^2 \varphi_j^y}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 \varphi_j^y}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

Если же по контуру пластина закреплена жёстко, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_i^x \Big|_{x=0} &= \varphi_i^x \Big|_{x=a} = 0, \frac{\partial \varphi_i^x}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi_i^x}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0; \\ \varphi_j^y \Big|_{y=0} &= \varphi_j^y \Big|_{y=b} = 0, \frac{\partial \varphi_j^y}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_j^y}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

Далее рассмотрим две системы: тригонометрическую и полиномиальную. В табл. 1 приводятся эти системы согласно виду закрепления. В случае полиномиальной системы представлены первые три элемента, которые использовались в данной работе. Здесь  $t$  — это аргумент ( $x$  или  $y$ ), а  $l$  — правая граница рассматриваемого интервала ( $a$  или  $b$ ).

Полиномиальная система получена из многочленов Лежандра [12–16]. Подробнее про построение данного вида аппроксимации можно посмотреть в работах [17–20].

Рассмотрим на примере, как различные виды базисных функций влияют на точность и сходимость решения.

Таблица 1

**Системы базисных функций**

	Тригонометрическая система	Полиномиальная система
Шарнирно-неподвижное закрепление по краям	$\varphi_i^t(t) = \sin\left(\frac{i\pi t}{l}\right)$	$\varphi_1^t(t) = \frac{5l^3t - 10lt^3 + 5t^4}{l^4};$ $\varphi_2^t(t) = \frac{-7l^4t + 70l^2t^3 - 105lt^4 + 42t^5}{l^5};$ $\varphi_3^t(t) = \frac{42t(l^5 - 30l^3t^2 + 85l^2t^3 - 84lt^4 + 28t^5)}{5l^6}$
Жёсткое закрепление по краям	$\varphi_i^t(t) = \sin^2\left(\frac{i\pi t}{l}\right)$	$\varphi_1^t(t) = \frac{30(l-t)^2 t^2}{l^4};$ $\varphi_2^t(t) = -\frac{(70l - 140t)(l-t)^2 t^2}{l^5};$ $\varphi_3^t(t) = \frac{(126l^2 - 588lt + 588t^2)(l-t)^2 t^2}{l^6}$

**Результаты**

В качестве примера для вычислительно-го эксперимента возьмём параметры плиты по ГОСТ 26434–2015 1П 30.60. Её размеры, характеристики материала и равномерно распределённой нагрузки приведены в табл. 2.

Для данной задачи были найдены приближённые решения методами Ритца и Бубнова–Галёркина в случаях  $n = m = 1$ ,  $n = m = 2$  и  $n = m = 3$ , или  $N = 1$ ,  $N = 4$  и  $N = 9$  для двух видов закрепления и двух видов аппроксимации. Полученные этими методами результаты (значение прогиба в центре пластины, значение функционала полной энергии деформации и значения общей невязки) полностью совпадают и приведены в табл. 3.

Если принимать во внимание только значения прогиба и функционала, складывается впечатление о сходимости решений по обоим видам аппроксимации. Однако при дальнейшем анализе значений общей невязки наблюдается следующий эффект. При полиномиальной аппроксимации для обоих случаев закрепления невязка уменьшается, но для тригонометрической это наблюдается только при шарнирно-неподвижном закреплении, в случае жёсткого —  $R_d^\Sigma$  остаётся неизменным, а  $\tilde{R}_d^\Sigma$  растёт.

Для визуализации полученных результатов были построены поверхности невязки, представленные в виде изополей. Для шарнирно-неподвижного закрепления — в табл. 4, для жёсткого — в табл. 5. Трёх-

Таблица 2

**Параметры рассматриваемой плиты**

Параметр	Длина, м		Толщина, м	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Полезная нагрузка, кПа
	по оси $x$	по оси $y$				
Значение	$a = 6$	$b = 3$	$h = 0,12$	$E = 34,5$	$\mu = 0,2$	$q = 8$

мерный вид для  $N=9$  — в табл. 6. Близкие к нулю значения выделены зелёным цветом, больше нуля — красным, меньше нуля — синим.

По данным табл. 4–6 видно, что полиномиальная аппроксимация быстро сходится (что отмечалось ещё в фундаментальной работе [21]): при  $N=9$  почти на всей области  $\Omega$  невязка равна нулю. Исключение составляют только углы области.

В случае тригонометрической аппроксимации наблюдаются осцилляции решения, причём чем выше приближение, тем их больше. Кроме того, при шарнирно-неподвижном закреплении наблюдается фиксация одного и того же значения невязки на границе области, которое не изменяется с увеличением приближения и отлично от нуля.

Наблюдаемые отклонения невязки от нуля на границе области вероятнее всего связаны с тем, что обычно используемая базисная система является избыточной по отношению к краевым условиям задачи. Например, у краевых условий (1) вместо равенства нулю вторых производных на самом деле должны

удовлетворяться условия равенства нулю изгибающих моментов:

$$\left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = 0,$$

которые являются более слабыми.

### Выводы

Таким образом, были получены следующие результаты. Тригонометрическая аппроксимация удобна в построении базисных систем, которые удовлетворяют краевым условиям, однако сходимость в их случае оказывается под вопросом: в случае шарнирного закреплении наблюдается среднеквадратичная сходимость, в случае жёсткого закреплении сходимости нет.

Полиномиальная аппроксимация даёт хороший результат по сходимости: невязка быстро стремится к нулю, кроме окрестностей углов области. Однако полиномиальная аппроксимация, которая бы удовлетворяла всем краевым условиям, оказывается очень

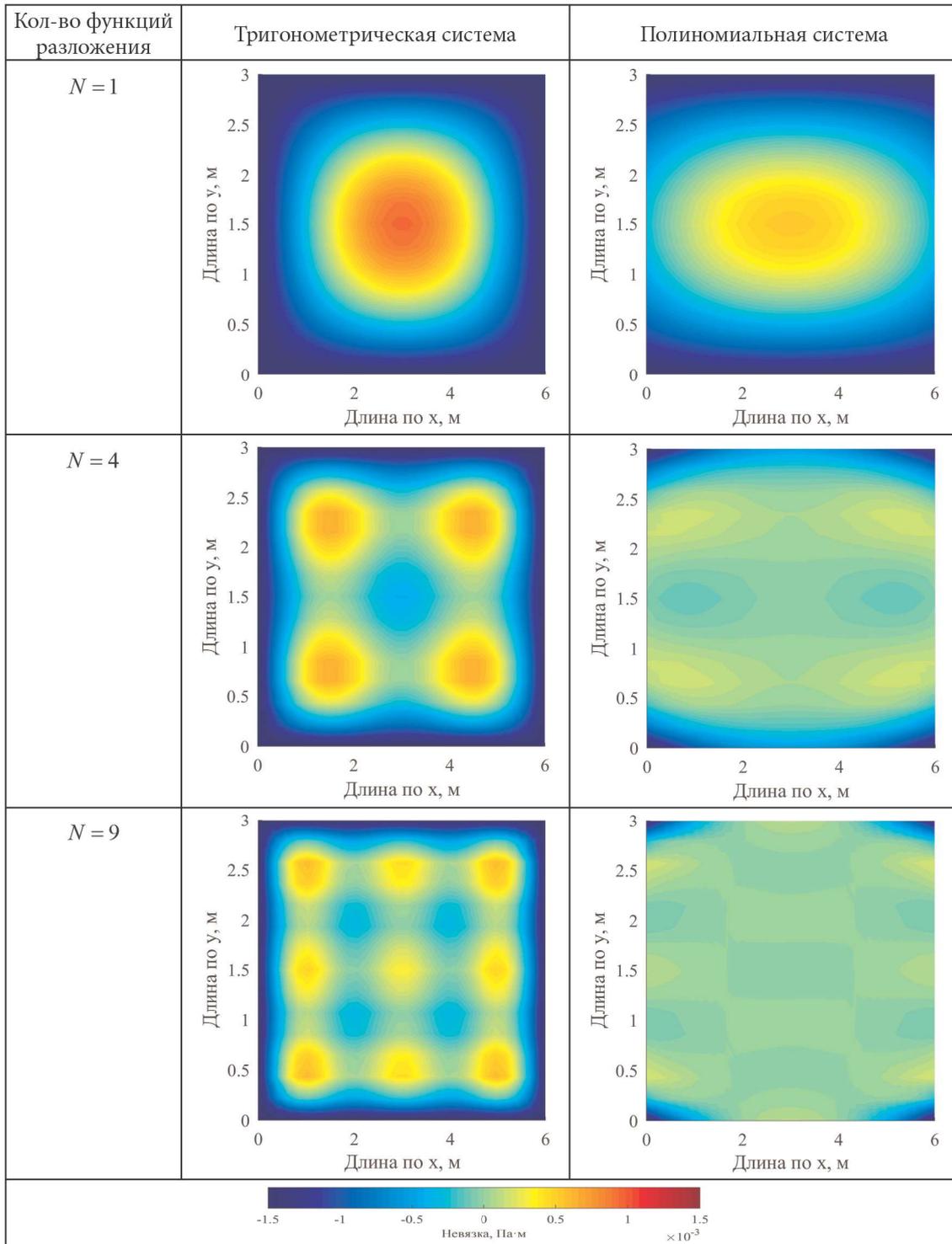
Таблица 3

Анализ сходимости решения для рассматриваемой плиты

$N$	Тригонометрическая система			Полиномиальная система		
	1	4	9	1	4	9
<i>Шарнирно-неподвижное закрепление</i>						
$\hat{w}^N(a/2, b/2)$ , мм	1,33372	1,26167	1,26955	1,32587	1,26560	1,26831
$E_s [\hat{w}^N]$ , Дж	38,91868	39,64327	39,69499	39,10163	39,69908	39,70579
$R_d^\Sigma$ , Па · м	-0,00954	-0,00526	-0,00360	-0,00640	-0,00135	-0,00032
$\tilde{R}_d^\Sigma$ , Па · м	0,00384	0,00285	0,00235	0,00284	0,00109	0,00054
<i>Жёсткое закрепление</i>						
$\hat{w}^N(a/2, b/2)$ , мм	0,34860	0,30302	0,31907	0,35507	0,31325	0,31725
$E_s [\hat{w}^N]$ , Дж	6,27488	7,44755	7,72202	7,27188	7,88809	7,90220
$R_d^\Sigma$ , Па · м	-0,02783	-0,02783	-0,02783	-0,01066	-0,00171	0,00060
$\tilde{R}_d^\Sigma$ , Па · м	0,00996	0,01302	0,01543	0,00402	0,00193	0,00131

Таблица 4

**Изополя невязки для шарнирно-неподвижного закрепления**

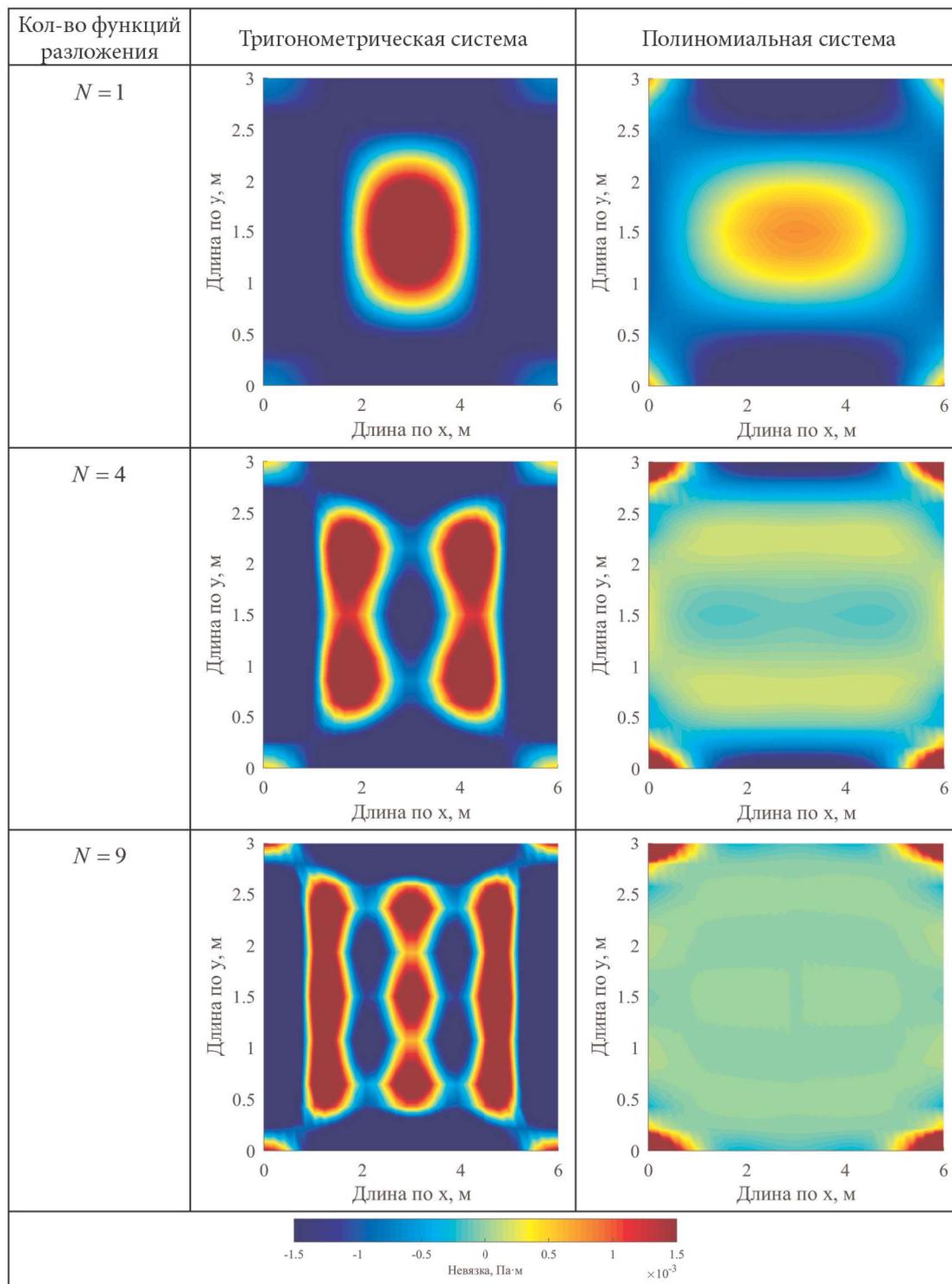


громоздкой. Кроме того, она очень чувствительна к вычислительной погрешности. При использовании пакетов прикладных мате-

матических программ можно сразу задать все параметры задачи и после этого производить операции интегрирования, диффе-

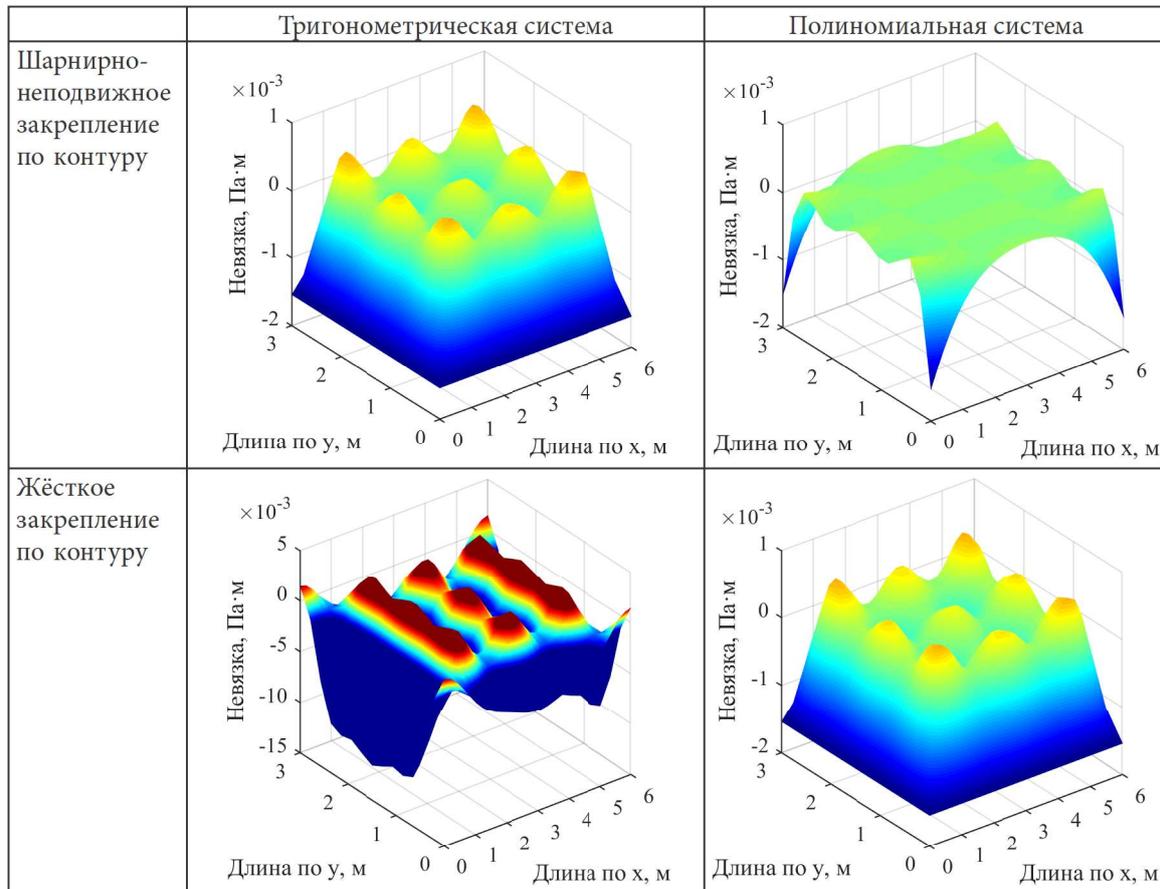
Таблица 5

Изополя невязки. Жёсткое закрепление по контуру



ренцирования и т. п. А можно сначала выполнить все операции символично, и только потом произвести подстановку численных

значений для параметров задачи. Первый вариант предпочтительнее в части скорости расчёта, а второй — в точности. В случае с

Поверхности невязки для  $N = 9$ 

тригонометрической аппроксимацией результаты по первому и второму алгоритму практически не будут отличаться. В случае с полиномиальной — отклонения будут достаточно серьёзными, поэтому в данном случае проводить вычислительный эксперимент можно только по первому варианту. Однако в случае с пластиной приближение выше  $N = 9$  провести не удалось из-за высокой вычислительной сложности (в случае полиномиальной аппроксимации символьных переменных оказалось слишком много).

Из вышесказанного следует, что при наличии соответствующих вычислительных мощностей полиномиальный базис для решения рассматриваемой задачи является более предпочтительным выбором. Между тем необходимо дальнейшее исследование мето-

дов приближённого решения задач механики как одномерных конструкций (стержней, балок), двумерных (пластин), так и более сложных, например, тонкостенных оболочечных конструкций.

#### Библиографический список

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration // Bulletin of the American Mathematical Society. 1943. Vol. 49. Pp. 1–23. DOI 10.1090/S0002-9904-1943-07818-4.
2. Radwańska M., Stankiewicz A., Wosatko A. Numerical Aspects of FEM Analysis of Plates and Shells // Recent Advances in Civil Engineering: Computational Methods. 2015. Pp. 125–142.
3. Завьялов И. С. Сравнительный анализ точности результатов расчета тонкой изгибаемой пластинки с использованием различных форм МКЭ // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 6 (305). С. 8–17. DOI 10.37538/0039-2383.2022.6.8.17.

4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

5. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2009. Vol. 1909 (135). Pp. 1–61. DOI 10.1515/crll.1909.135.1.

6. Meng S., Wang Q., Zhong R., Qin B. Legendre–Ritz solutions for vibration characteristics of three-dimensional double-layer lattice truss sandwich plates // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 203. 112185. DOI 10.1016/j.tws.2024.112185.

7. Галёркин Б. Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестник инженеров. 1915. Т. 1, № 19. С. 897–908.

8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

9. Бакушев С. В. Изгиб тонких жёстких пластин с касательными усилиями // Региональная архитектура и строительство. 2022. № 1 (50). С. 63–74. DOI 10.54734/20722958\_2022\_1\_63.

10. Ермоленко А. В., Ладанова С. В. Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 3 (36). С. 87–92. DOI 10.34130/1992-2752\_2020\_3\_87.

11. Закураев А. Ф., Калажоков Х. Х., Рябов А. В., Увижева Ф. Х. Методы расчета характеристик упругодеформированного состояния понтонных пластин из композитных материалов при проектировании трубопроводов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2015. № 6–2 (68). С. 78–83.

12. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1979. 416 с.

13. Невский М. В. Оценивание интерполяционных проекторов с применением многочленов Лежандра // Моделирование и анализ информационных систем. 2024. Т. 31, № 3. С. 316–337. DOI 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337.

14. Гарманова Т. А., Шейнак И. А. О соотношениях ортогональности первообразных многочленов Лежандра и их приложениях к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов // Математические заметки. 2021. Т. 110, № 4. С. 498–506. DOI 10.4213/mzm13168.

15. Ярцев Б. А., Рябов В. М., Паршина Л. В. Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 2. Метод решения // Труды Крыловского государственного научного центра. 2022. № 1 (399). С. 55–64. DOI 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64.

16. Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи // Вестник

Санкт-Петербургского ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7, № 3. С. 469–480. DOI 10.21638/spbu01.2020.309.

17. Ильин В. П., Карнов В. В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л.: Стройиздат, 1986. 168 с.

18. Бакусов П. А., Семенов А. А. Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси // Вестник Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. 2017. № 3. С. 17–36. DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.02.

19. Каменев И. В., Черных А. Г., Бакусов П. А., Малов Ю. В. Решение задачи устойчивости оболочечных конструкций с применением тригонометрического и полиномиальных базисов // Вестник гражданских инженеров. 2022. № 5 (94). С. 54–60. DOI 10.23968/1999-5571-2022-19-5-54-60.

20. Ardekani H. H., Assaei H. An Investigation on the Forced Vibration Behavior of Plates Featuring Complex and Arbitrary Geometries Using Isogeometric Analysis // Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2024. Vol. 12. Pp. 39–41. DOI 10.1007/s42417-024-01500-2.

21. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

## References

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1943, vol. 49, pp. 1–23. DOI 10.1090/S0002-9904-1943-07818-4.

2. Radwańska M., Stankiewicz A., Wosatko A. Numerical Aspects of FEM Analysis of Plates and Shells. *Recent Advances in Civil Engineering: Computational Methods*, 2015, pp. 125–142.

3. Zav'yalov I. S. *Sravnitel'niy analiz tochnosti rezul'tatov rascheta tonkoy izgibaemoy plastinki s ispol'zovaniem razlichnykh form MKE* [Comparative analysis of accuracy of results of calculation of a thin bending plate using different forms of FEM]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural mechanics and structural design*, 2022, no. 6 (305), pp. 8–17. DOI 10.37538/0039-2383.2022.6.8.17.

4. Samarskiy A. A., Nikolaev E. S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods for solving mesh equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p.

5. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2009, vol. 1909 (135), pp. 1–61. DOI 10.1515/crll.1909.135.1.

6. Meng S., Wang Q., Zhong R., Qin B. Legendre–Ritz solutions for vibration characteristics of three-dimensional double-layer lattice truss sandwich plates. *Thin-Walled*

Structures, 2023, vol. 203, 112185. DOI 10.1016/j.tws.2024.112185.

7. Galyorkin B. G. *Sterzhni i plastinki. Ryady v nekotorykh voprosakh uprugogo ravnovesiya sterzhney i plastinok* [Rods and plates. Rows in some questions of elastic equilibrium of rods and plates]. *Vestnik inzhenerov – Herald of Engineers*, 1915, vol. 1, no. 19, pp. 897–908.

8. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastiny i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.

9. Bakushev S. V. *Izgib tonkikh zhyostkikh plastin s kasatel'nymi usiliyami* [Bending of thin rigid plates with tangential forces]. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo – Regional Architecture and Construction*, 2022, no. 1 (50), pp. 63–74. DOI 10.54734/20722958\_2022\_1\_63.

10. Ermolenko A. V., Ladanova S. V. *Kontaktnaya zadacha dlya dvukh plastin s raznym zakrepleniem* [Contact problem for two plates with different fastening]. *Vestnik Syktyvskarskogo un-ta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika – Herald of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, no. 3 (36), pp. 87–92. DOI 10.34130/1992-2752\_2020\_3\_87.

11. Zakuraev A. F., Kalazhokov Kh. Kh., Ryabkov A. V., Uvizheva F. Kh. *Metody rascheta kharakteristik uprugodeformirovannogo sostoyaniya pontonnykh plastin iz kompozitnykh materialov pri proektirovanii truboprovodov* [Methods of calculation of characteristics of elastically deformed state of pontoon plates from composite materials in pipeline design]. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN – Proceedings of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2015, no. 6–2 (68), pp. 78–83.

12. Suetin P. K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. 2-nd ed., revised. Moscow, Nauka Publ., 1979, 416 p.

13. Nevskiy M. V. *Otsenivanie interpolatsionnykh proektorov s primeneniem mnogochlenov Lezhandra* [Estimation of interpolation projectors with application of Lejandre polynomials]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem – Modeling and analysis of information systems*, 2024, vol. 31, no. 3, pp. 316–337. DOI 10.18255/1818-1015-2024-3-316-337.

14. Garmanova T. A., Sheypak I. A. *O sootnosheniyakh ortogonal'noyi pervaobraznykh mnogochlenov Lezhandra, i ikh prilozheniyakh k nekotorym spektral'nym zadacham dlya differentsial'nykh operatorov* [On the orthogonality relations of first-order Lejandre polynomials and their applications to some spectral problems for differential

operators]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2021, vol. 110, no. 4, pp. 498–506. DOI 10.4213/mzm13168.

15. Yartsev B. A., Ryabov V. M., Parshina L. V. *Dissipativnye svoystva trekhslonnykh kompozitnykh struktur. 2. Metod resheniya* [Dissipative properties of three-layer composite structures. 2. Method of solution]. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra – Proceedings of the Krylov State Scientific Center*, 2022, no. 1 (399), pp. 55–64. DOI 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64.

16. Ryabov V. M., Yartsev B. A., Parshina L. V. *Svyazannye kolebaniya vyazkouprugikh trekhslonnykh kompozitnykh plastin. 1. Postanovka zadachi* [Bound vibrations of viscoelastic three-layer composite plates. 1. Problem statement]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo un-ta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7, no. 3, pp. 469–480. DOI 10.21638/spbu01.2020.309.

17. Il'in V. P., Karpov V. V. *Ustoychivost' rebristykh obolochek pri bol'shikh peremeshcheniyakh* [Stability of ribbed shells at large displacements]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1986, 168 p.

18. Bakusov P. A., Semenov A. A. *Ustoychivost' segmentov toroidal'nykh obolochek pri izmenenii ugla otkloneniya ot vertikal'noy osi* [Stability of toroidal shell segments at changing the angle of deviation from the vertical axis]. *Vestnik Permskogo nats. issled. politekhn. un-ta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research University. Mechanics*, 2017, no. 3, pp. 17–36. DOI 10.15593/perm.mech/2017.3.02.

19. Kamenev I. V., Chernykh A. G., Bakusov P. A., Malov Yu. V. *Reshenie zadachi ustoychivosti obolocheknykh konstruksiy s primeneniem trigonometricheskogo i polinomial'nykh bazisov* [Solution of the problem of stability of shell structures using trigonometric and polynomial bases]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2022, no. 5 (94), pp. 54–60. DOI 10.23968/1999-5571-2022-19-5-54-60.

20. Ardekani H. H., Assae H. An Investigation on the forced vibration behavior of plates featuring complex and arbitrary geometries using iso-geometric analysis. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2024, vol. 12, pp. 39–41. DOI 10.1007/s42417-024-01500-2.

21. Mikhlin S. G. *Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov* [Numerical realization of variational methods]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 432 p.