УДК 699.88
DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-3-68-73

© *В. М. Овсянников*, д-р техн. наук, профессор
(Российский университет транспорта,
Москва, Россия)
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

© *V. M. Ovsyannikov*, Dr. Sci. Tech., Professor
(Russian University of Transport,
Moscow, Russia)
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

УЧЕТ ВЫСШИХ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

TAKING INTO ACCOUNT HIGHER INVARIANTS OF THE STRAIN TENSOR IN PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

В гидродинамических течениях второй (квадратичный) и третий (кубичный) инварианты тензора скоростей деформаций генерируют волны. Они являются побудителями колебаний. Второй и третий инварианты тензора деформаций также могут генерировать волны в упругом твердом теле. Статья содержит уравнения движения в перемещениях С. П. Тимошенко и Дж. Гудьера. Решение этих уравнений дает возможность вычислить интенсивность колебаний, если в них учитывать второй и третий инварианты тензора деформаций. Сильные колебания опасны для здания и могут его разрушить.

Ключевые слова: теория упругости, перемещения, волновое уравнение, тензор деформаций, разрушение здания.

In hydrodynamic flows the second (quadratic) and third (cubic) invariants of the strain rate tensor generate waves. They are the stimuli of vibrations. The second and third invariants of the strain rate tensor can also generate waves in an elastic solid. The article contains the equations of motion in displacements of S. P. Timoshenko and J. N. Goodier. The solution of these equations makes it possible to calculate the intensity of vibrations if the second and third invariants of the strain tensor are taken into account. Strong vibrations are dangerous for the building. They can lead to the building collapse.

Keywords: theory of elasticity, displacement, wave equation, strain tensor, building collapse.

Введение

В 1997–1999 гг. В. А. Бубнов обнародовал неожиданное заключение, что в уравнение неразрывности жидкости, помимо оператора дивергенции, входят члены высокого порядка малости [1–3]. Он это обнаружил у Н. Е. Жуковского в магистерской диссертации [4, 5]. Это отмечено и в широко известном учебнике Кибеля, Кочина и Розе [6] (на с. 10 т. 1 издания 1941 г.). В 2006 г. вывод членов высокого порядка малости был обнаружен в раннем варианте классической работы Эйлера Principia motus fluidorum [7–9].

Среди математиков существует направление бережного отношения ко всей информации, заложенной в уравнения механики. Этому посвящена важная статья д-ра физ.-мат. наук Л. И. Северинова [10]. За последние два десятилетия решены некоторые гидродинамические задачи [11–17] с учетом членов высокого порядка малости уравнения неразрывности, входящих во второй (квадратичный) инвариант и в третий (кубичный) инвариант тензора скоростей деформаций. Оказалось, что эти высшие инварианты попадают в правую, источниковую, неоднородную часть волнового уравнения и приводят к генерации автоколебаний, вибраций и звука в потоке жидкости.

Ввиду схожести деформаций сжатия–расширения и сдвига в теории упругости и в гидродинамике можно ожидать проявления схожих явлений волнообразования и в теории упругости для твердых тел.

Методы

Как было указано во введении, учет квадратичного (второго) и кубичного (третьего) инвариантов тензора скоростей деформаций в движущейся жидкости вызывает автоколебания. Автоколебания твердых тел могут создавать опасность их разрушения. Рассмотрим путь возможного расчета колебаний.

Уравнение движения в перемещениях согласно книге С. П. Тимошенко и Дж. Гудьера [18] (ур. 269 на с. 490) имеет вид

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u+X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0; \qquad (1)$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v+Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0; \qquad (2)$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w+Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \qquad (3)$$

Здесь u,v,w — компоненты вектора перемещения точки вдоль осей координат x,y,z в результате приложения силы с компонентами X,Y,Z; t — время, отсчитываемое с момента приложения силы; ρ — плотность материала тела; λ — коэффициент Ламе; G — модуль сдвига; e — коэффициент объемного расширения окрестности точки с координатами x,y,z, произошедшего от воздействия силы с компонентами X,Y,Z.

Л. И. Седов в §5 «Теория деформаций» в разделе «Коэффициент кубического расширения» первого тома учебника «Механика сплошной среды» [19, с. 75] приводит формулу для коэффициента объемного расширения, получающуюся точным геометрическим расчетом:

$$\theta=\left(1+2I_1+4I_2+8I_3\right)^{0,5}-1,$$

содержащую три инварианта тензора деформаций: I_1, I_2, I_3.

Л. И. Седов пишет, что в случае бесконечно малых деформаций коэффициент объемного расширения можно приближенно приравнять первому, линейному инварианту

$$\theta\approx I_1.$$

При этом условии производится изучение теории упругости. Создается впечатление, что высшие инварианты I_2, I_3 тензора деформаций несущественно влияют на решение задачи теории упругости. Для проверки этого можно решить уравнение движения для трехмерной или двухмерной нагрузки с учетом высших инвариантов и оценить степень отличия решений.

В гидродинамике волновое уравнение, описывающее колебательные режимы движения, получается взятием производных по времени от уравнения неразрывности и по координате от уравнения движения, а затем вычитанием результатов одного из другого. При взятии производных по времени слагаемые с высшими инвариантами теряют степень своей малости, становясь сопоставимыми с основными членами волнового оператора Даламбера.

Уравнение движения в перемещениях (1)–(3) для теории упругости само имеет характер волнового уравнения и содержит волновой оператор Даламбера. Приведем данное уравнение движения в перемещениях к виду неоднородного волнового уравнения, предположив тождественность коэффициентов объемного расширения Тимошенко–Гудьера и Седова:

$$e=\theta=\left(1+2I_1+4I_2+8I_3\right)^{0,5}-1.$$

Волновое уравнение, или уравнение движения теории упругости, будет иметь вид

$$G\nabla^2 u-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=$$
$$=-X-(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+2I_1+4I_2+8I_3\right)^{0,5}-1\right]; \qquad (4)$$

$$G\nabla^2 v-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=$$
$$=-Y-(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+2I_1+4I_2+8I_3\right)^{0,5}-1\right]; \qquad (5)$$

$$G\nabla^2 w-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=$$
$$=-Z-(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+2I_1+4I_2+8I_3\right)^{0,5}-1\right]. \qquad (6)$$

Результаты

Систему уравнений (4)–(6) можно решить методом последовательных приближений. Это выполняется следующим образом:

на первой итерации все инварианты I_1, I_2, I_3 полагаются равными нулю. Система принимает вид

$$G\nabla^2 u - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -X; \qquad (7)$$

$$G\nabla^2 v - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -Y; \qquad (8)$$

$$G\nabla^2 w - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -Z. \qquad (9)$$

Ее решение для перемещения получается методом запаздывающего потенциала [20].

Интегрирование производится внутри расширяющейся сферы, до границы которой дошло воздействие приложенной силы с компонентами X, Y, Z. В разные моменты времени эта сфера имеет различный радиус:

$$R = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right]^{0,5} < c_0 t.$$

На второй итерации вычисляются компоненты перемещения u, v, w интегрированием полных уравнений (4)–(6), в которых высшие инварианты вычислены с учетом найденных на первой итерации значений u, v, w и их производных по координатам x, y, z.

Обсуждение

Учебник Л. И. Седова «Механика сплошной среды» [19] охватывает гидродинамику, электродинамику и теорию упругости. Изложение теории деформаций является общим для всех дисциплин, поэтому высшие инварианты, второй и третий, могут проявляться и в гидродинамике [17]. По гидродинамическому волновому уравнению удалось рассчитать и раскачку ветром Волгоградского автомобильного моста в 2010 г., гармонические колебания с амплитудой 1÷1.5 м наблюдались несколько часов. Расчет показал возникновение колебаний в воздухе, обтекающем профиль моста за счет учета второго (квадратичного) инварианта. Длительные колебания воздуха передались конструкции моста и прекратились, как только ветер утих. Конструкция моста не пострадала. Менее сильные колебания под воздействием ветра отмечались неоднократно.

По гидродинамическому волновому уравнению удалось рассчитать и гидроудар Жуковского, выбросивший ротор турбины Саяно-Шушенской ГЭС в 2009 г.

Обычно гидравлические удары наблюдаются при одномерном течении жидкости в трубопроводах при быстром закрытии задвижки перед потоком сжимаемой жидкости. Третий инвариант позволяет описать возникновение уединенной волны давления гидроудара при сложном трехмерном течении.

Использование второго инварианта дает описание вибрации оси ротора турбины, а третий инвариант при возникшем трехмерном течении дает гидроудар.

Аварийные ситуации, описываемые высшими инвариантами, случаются сравнительно редко. Подтверждением реальности проявления дополнительных слагаемых в волновых уравнениях являются и гидродинамические аварии.

Отмеченное академиком Седовым обогащение уравнений механики сплошной среды учетом высших инвариантов указывает актуальный и своевременный путь развития гидродинамики, аэродинамики, электродинамики и теории упругости, для которого есть все условия.

Для изучения дополнительных разделов курса «Механика сплошной среды» в 2020 г. издано учебное пособие «Волнообразование и уравнение неразрывности Леонарда Эйлера» и монография с таким же названием [17]. Также был издан перевод с латыни начальных разделов доклада Эйлера Principia motus fluidorum, содержащих вывод Эйлером уравнения неразрывности [9].

Обсудим возможность разрушения конструкции. При изменении сил перемещение упругого тела из первого статически устойчивого положения во второе статически устойчивое положение сопровождается волновыми колебаниями с угловой амплитудой α, определяемой величиной высших

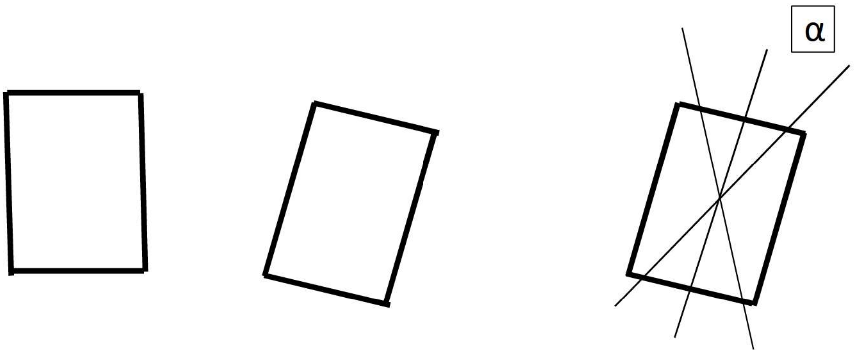

Иллюстрация перемещений, сопровождаемых колебаниями упругого тела с угловой амплитудой α, приводящими к потере его прочности и разрушению

инвариантов тензора деформаций I_2, I_3, уничтожаемых в теории упругости согласно [19] в уравнении неразрывности и в соответствующих ему волновых уравнениях вида

$$G\nabla^2 u - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -X - (\lambda + G)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3\right)^{0,5} - 1\right].$$

При большом размахе колебаний здание может проскочить мимо второго статического положения и опрокинуться; при возникновении сильных колебаний твердая упругая конструкция может потерять твердость и рассыпаться (рисунок). При расчете без учета высших инвариантов колебания будут получаться с меньшей амплитудой. Таким образом, расчет без учета высших инвариантов дает недоучет надежности сооружения.

Выводы

Выписана система уравнений движения в перемещениях теории упругости с учетом высших инвариантов.

Учитывая второй и третий инварианты, можно в некоторых случаях объяснить картину «самопроизвольно, беспричинно» разрушающихся сооружений.

Вычислив с учетом второго и третьего инвариантов наиболее уязвимые места сооружения, можно сделать их при проектировании более прочными.

Библиографический список

1. *Бубнов В. А.* Физические принципы гидродинамических движений // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике: сб. ст. М., 1997. Вып. 4. С. 206–269.

2. *Бубнов В. А.* Кинематика жидкой частицы // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике: сб. ст. М., 1999. Вып. 7. С. 11–29.

3. *Bubnov V. A.* Convective Heat and Mass Transfer in an Insulated Trailing Swirl. New York: Begell House Inc., 1998. 174 p.

4. *Жуковский Н. Е.* Кинематика жидкого тела. М.: Университетская типография (Катковъ) на Страстном бульваре, 1876. 155 с.

5. *Жуковский Н. Е.* Полное собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. М.; Л.: Объединенное научно-техническое изд-во: Народный комиссариат точной промышленности СССР, 1935. 360 с.

6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. Л.; М.: ОГИЗ, 1941. 348 с.

7. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1761. Vol. 6 (1756–1757). Pp. 271–311; *Idem.* Principia motus… // Opera omnia. Ser. II. Vol. 12. Pp. 133–168.

8. *Euleri L.* Commentationes mechanicae: ad theoriam corporum fluidorum pertinentes. Edidit Truesdell C. A. Vol. prius. Lausannae, 1954.

9. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. (Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН) / пер. с лат. Е. В. Ивановой и В. М. Овсянникова. 4-е изд., доп. М.: Спутник +, 2020. 203 с.

10. *Северинов Л. И.* О применении законов изменения количественных мер движения для конечного объёма в конечных приращениях при численном решении задач механики сплошной среды // Проблемы аксиоматики в развитии процессов. Вводные представления. Вып. 1. М.: Фирма «Систем-прогноз», 1993. С. 66–95.

11. *Овсянников В. М.* Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. 2006. № 15. С. 19–51.

12. *Овсянников В. М.* Разностная форма уравнения неразрывности с учетом деформаций сдвига // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. 2007. № 16. С. 13–38.

13. *Овсянников В. М.* Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 182. 2020. С. 95–100.

14. *Ovsyannikov V. M.* Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness — An Overview // Fluids. 2021. Vol. 6 (4). 162.

15. *Овсянников В. М.* Уравнение неразрывности Леонарда Эйлера с учетом членов высокого порядка малости по времени // XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения — 2014»: тез. докл. Новополоцк, Беларусь, 20–22 мая 2014 г. Ч. 2. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2014. С. 102–103.

16. *Овсянников В. М.* История вывода уравнения неразрывности // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл. Казань, 20–24 августа 2015 г. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2015. С. 2826–2827.

17. *Овсянников В. М.* Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Спутник+, 2016. 457 с.

18. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. М.: Наука, 1975. 576 с.

19. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Изд. 2-е, испр. и доп. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.

20. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.

References

1. Bubnov V. A. *Fizicheskie principy gidrodinamicheskih dvizhenij* [Physical principles of hydrodynamic motions]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike – Problems of axiomatics in fluid and gas dynamics*, Moscow, 1997, iss. 4, pp. 206–269.

2. Bubnov V. A. *Kinematika zhidkoj chasticy* [Kinematics of a liquid particle]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike – Problems of axiomatics in fluid and gas dynamics*, Moscow, 1999, iss. 7, pp. 11–29.

3. Bubnov V. A. *Convective heat and mass transfer in an insulated trailing swirl.* NewYork, Begell House Inc. Publ., 1998, 174 p.

4. Zhukovskij N. E. *Kinematika zhidkogo tela* [Kinematics of Liquid Body]. University Printing House (Katkov) Na Strastnom bul'vare Publ. Matematicheskie dissertacii [Mathematical Dissertations], 1876, vol. 5.

5. Zhukovskij N. E. *Polnoe sobranie sochineniy* [Complete Works]. Vol. 2. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Leningrad, United Scientific and Technical Publishing House. People's Commissariat of Precision Industry of the USSR Publ., 1935, 360 p.

6. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Pt. I. Leningrad, Moscow, OGIZ Publ., 1941, 348 p.

7. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior. *Novi Commentarii academia escientiarum Petropolitanae,* 1761, vol. 6 (1756–1757), pp. 271–311; Opera omnia. Ser. II, vol. 12, pp. 133–168.

8. Euler L. *Commentation esmechanicae: ad theoriam corporum fluidorumpertinentes.* Edidit Truesdell C. A. Vol. prius. Lausannae, 1954.

9. Euler L. *Principy dvizheniya zhidkostey* [Principles of motion of fluids]. Translation of the initial sections of the 1752 report to the Berlin Academy of Sciences. Transl. from Latin by Ivanova E. V., Ovsyannikov V. M. , 4-th. ed., revised. Moscow, Sputnik + Publ., 2020, 203 p.

10. Severinov L. I. *O primenenii zakonov izmeneniya kolichestvennyh mer dvizheniya dlya konechnogo ob"yoma v konechnyh prirashcheniyah pri chislennom reshenii zadach mekhaniki sploshnoj sredy* [On the application of laws of change of quantitative measures of motion for a finite volume in finite increments at numerical solution of problems of continuum mechanics] *Problemy aksiomatiki v razvitii processov. Vvodnye predstavleniya – Problems of axiomatics in the development of processes. Introductory Notes*, 1993, iss. 1. Moscow, Sistem-prognoz Publ., pp. 66–95.

11. Ovsyannikov V. M. *Vvedenie v aksiomaticheskuyu mekhaniku zhidkosti, osnovannuyu na bazisnyh eksperimentah s zhidkost'yu* [Introduction to axiomatic fluid mechanics based on basic fluid experiments]. – *Problems of axiomatics in fluid and gas dynamics*, Moscow, 2006, no. 15, pp. 19–51.

12. Ovsyannikov V. M. *Raznostnaya forma uravneniya nerazryvnosti s uchetom deformacij sdviga* [Difference form of the continuity equation taking into account shear deformations]. *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike – Problems of axiomatics in fluid and gas dynamics*, 2007, no. 16, pp. 13–38.

13. Ovsyannikov V. M. *Uravnenie nerazryvnosti Ejlera s chlenami vysokogo poryadka malostipo vremeni techeniya* [Euler's continuity equation with high-order terms in

time] *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory – Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and Its Applications. Thematic Surveys,* 2020, vol. 182, pp. 95–100.

14. Ovsyannikov V. M. *Euler's Equation of Continuity: Additional Terms of High Order of Smallness*. Overview. *Fluids,* 2021, vol. 6 (4), 162 p.

15. Ovsyannikov V. M. *Uravnenie nerazryvnosti Leonarda Ejlera s uchetom chlenov vysokogo poryadka malosti po vremeni* [Leonard Euler's equation of continuity with consideration of terms of high order of smallness in time]. *Trudy XVI Mezhdunar. nauch. konf. po differencial'nym uravneniyam «Eruginskie chteniya – 2014» Novopolotsk, Belarus', 20–22 maya 2014* [Proceedings of the XVI Intern. nauchn. conf. on differential equations "Erugin Readings – 2014" Novopolotsk, Belarus, May 20–22, 2014]. Pt. 2. Minsk, Institut matematiki NAN Belarusi Publ., 2014, pp. 102–103.

16. Ovsyannikov V. M. *Istoriya vyvoda uravneniya nerazryvnosti* [History of the derivation of the continuity equation]. *Trudy XI Vseros. s"ezda po fundamental'nym problemam teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki. Kazan', 20–24 avgusta 2015 g.* [Proceedings of the XI All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Kazan, August 20-24, 2015]. Kazan, Kazan (Volga Region) Federal Univ. Publ., 2015, pp. 2826–2827.

17. Ovsyannikov V. M. *Volnoobrazovanie i konechno-raznostnoe uravnenie nerazryvnosti Leonarda Ejlera* [Wave formation and the Leonard Euler finite-difference continuity equation]. Moscow, Sputnik+ Publ., 2016, 457 p.

18. Timoshenko S. P., Gudier J. N. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Transl. from English by M. I. Reitman; ed. by G. S. Shapiro. Moscow, Nauka Publ., 1975, 576 p.

19. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoj sredy* [Mechanics of continuous medium]. 2-nd. ed., revised, vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1973, 536 p.

20. Godunov S. K. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 416 p.