

УДК 624.074.43+539.3

© А. А. Семенов, д-р техн. наук, доцент  
(Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия)  
E-mail: sw.semenov@gmail.com

DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-6-33-41

© A. A. Semenov, Dr. Sci. Tech., Associate Professor  
(Saint Petersburg State University  
of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russia)  
E-mail: sw.semenov@gmail.com

## МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УЧЕТЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

### MODEL OF DEFORMATION OF THIN-WALLED SHELL STRUCTURES TAKING INTO ACCOUNT ENERGY DISSIPATION

Предложены соотношения математической модели, описывающей процесс деформирования оболочек и учитывающей потерю энергии в соответствии с функцией диссипации Рэлея. Также учитываются нелинейность геометрических соотношений, поперечные сдвиги, инерция вращения, ортотропия материала. Система уравнений получена в виде уравнений Эйлера – Лагранжа. Показан пример расчета пологой оболочки двойной кривизны при выборе разных коэффициентов в функции диссипации Рэлея. Графики отражают поведение конструкции после снятия динамической нагрузки.

*Ключевые слова:* оболочки, динамическое нагружение, геометрическая нелинейность, математическая модель, функция диссипации Рэлея.

This paper proposes relationships for a mathematical model describing the deformation process of shells and accounting for energy loss in accordance with the Rayleigh dissipation function. Nonlinearity of geometric relationships, transverse shear, rotational inertia, and material orthotropy are also considered. The system of equations is derived in the form of the Euler — Lagrange equations. An example of calculating a shallow shell with double curvature is presented, selecting different coefficients in the Rayleigh dissipation function. The graphs show the behavior of the structure after the dynamic load is removed.

*Keywords:* shells, dynamic loading, geometric nonlinearity, mathematical model, Rayleigh dissipation function.

#### Введение

Тонкостенные оболочечные конструкции используются как в строительстве, так и других отраслях промышленности. Благодаря своим геометрическим характеристикам они выдерживают достаточно большие нагрузки и при этом остаются легкими и прочными.

В связи с тем, что процесс деформирования тонкостенных оболочек существенно нелинейный, их моделирование и исследование представляют собой сложную задачу, требующую значительных вычислительных

ресурсов и разработки специализированного программного обеспечения [1–3].

Кроме того, на адекватность получаемых при расчетах результатов влияет учет различных факторов, таких как поперечные сдвиги, ортотропия материала, геометрическая нелинейность. При динамических воздействиях одним из ключевых факторов является учет демпфирования. Как отмечается в работе [4], вопрос о диссипации энергии тела, деформируемого под действием внешних нагрузок, пока не имеет однозначного решения и до сих пор изучен недостаточно.

Известно несколько подходов к учету диссипации энергии (демпфирования), рассмотрим основные.

Первый подход основан на добавлении в систему уравнений слагаемых с первыми производными от функций перемещений по времени [5, 6]. Такой прием используется, поскольку напрямую такие уравнения не получить из условия минимума функционала полной энергии с помощью вариационных преобразований, так как при учете диссипации система перестает быть консервативной. Производные умножаются на матрицу  $C = \alpha M + \beta K$  [5, 7–10], где  $C$  — матрица демпфирования,  $M$  — матрица масс,  $K$  — матрица жесткости,  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты Рэлея. Такой подход носит название рэлеевского демпфирования.

Другой подход основан на добавлении в уравнения Эйлера–Лагранжа функции диссипации Рэлея [11–13], когда, например

$$F = \frac{1}{2} c \int_S (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dS, \quad (1)$$

здесь  $U, V, W$  — компоненты перемещений (м), а точка означает производную по переменной времени  $t$ .

Коэффициент  $c$ , присутствующий в этой функции, определяется экспериментально, и в большинстве данных о свойствах материалов такая информация отсутствует.

Также функция диссипации Рэлея использовалась, например, в работах [14–19].

Существует также подход, который учитывает диссипацию энергии за счет добавления в функционал отношения энергии демпфирования, рассеиваемой за цикл колебаний, к максимальной энергии деформации [20–24]. С использованием данного подхода механизм демпфирования в ортотропных пластинах из стеклопластика был описан Адамсом и Бэконом в работе [25]. В модели предполагалось, что энергия демпфирования представляет собой сумму отдельных диссипаций энергии, обусловленных главными компонентами напряжения

в системе координат волокон пластины, включая напряжения вдоль и поперек волокон, а также продольное касательное напряжение в плоскости [26–28].

К наиболее актуальным работам в области демпфирования следует также отнести работы В. Н. Сидорова, М. В. Шитиковой, Е. С. Бадьиной и Е. П. Детина [4, 29, 30].

Целью данного исследования является расширение разработанных автором ранее математических моделей и алгоритмов на задачи расчета оболочечных конструкций с учетом демпфирования.

### 1. Теория и методы

Для получения основных соотношений математической модели используем функционал полной энергии (диссипация на данном этапе пока не учитывается):

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt, \quad (2)$$

где  $E_k$  — кинетическая энергия;  $t$  — время;  $E_s = E_p - A$  — разность потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил:

$$\begin{aligned} E_s = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left( N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + \right. \\ & + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + \\ & + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - \\ & \left. - 2(P_x U + P_y V + qW) \right) AB dx dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\Psi_x, \Psi_y$  — функции изменения углов поворота нормали;  $A$  и  $B$  — параметры Ляме;  $P_x, P_y, q$  — компоненты нагрузки. Подробно выражения для деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  (с учетом геометрической нелинейности), усилий  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  и моментов  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ , поперечных сил  $Q_x, Q_y$ , функций изменения кривизны  $\chi_1, \chi_2$  и кручения  $\chi_{12}$  рассматривались ранее, в том числе в работе [31].

Предлагаемая математическая модель строится на основе гипотез модели Тимошенко (Миндлина–Рейсснера, FSDT) и позволяет учитывать инерцию вращения

и поперечные сдвиги. Тогда кинетическая энергия для оболочки толщиной  $h$  [32, 33] будет равна

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left( \left( \frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy dz, \quad (4)$$

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W.$$

Вычислив интеграл по переменной  $z$ , получим

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b h \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left( \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy. \quad (5)$$

Подставим аппроксимирующие функции (в соответствии с методом Л. В. Канторовича) в функционал (2). После вычисления интегралов по переменным  $x$  и  $y$  от известных функций функционал  $I$  представляет собой одномерный функционал от функций  $U_{ij}(t) - \Psi_{yij}(t)$ . Далее используем известное уравнение Эйлера–Лагранжа [34]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 5N, \quad (6)$$

где

$$X(t) = (U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), \Psi_{xij}(t), \Psi_{yij}(t))^T,$$

$i, j = 1, \dots, \sqrt{N}$ , а точкой обозначена производная по времени.

Дополним уравнения Эйлера–Лагранжа слагаемым, учитывающим демпфирование на основе функции диссипации Рэлея. В известных работах функция диссипации Рэлея записана для модели деформирования конструкции без учета поперечных сдвигов (модель Кирхгофа–Лява, Койтера, CSDT), а также не учитывается толщина обшивки:

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy. \quad (7)$$

В то же время от этого зависит, как именно определять коэффициент  $c$ , какую он будет иметь размерность и порядок.

В данной работе по аналогии с выражением для кинетической энергии запишем для модели Тимошенко–Рейсснера функцию диссипации Рэлея:

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left( \left( \frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy dz. \quad (8)$$

После интегрирования по переменной  $z$  получим

$$F = \frac{c}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b h \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{h^3}{12} \left( \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) AB dx dy. \quad (9)$$

Итак, добавим слагаемое, содержащее функцию диссипации Рэлея (с учетом предложенных уточнений), в уравнение Эйлера – Лагранжа, как это делается, например, в работах [11, 13, 14]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} - \frac{\partial F}{\partial \dot{X}_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N. \quad (10)$$

Дополним систему уравнений начальными условиями при  $t = 0$ :

$$U_{ij} = V_{ij} = W_{ij} = \Psi_{xij} = \Psi_{yij} = 0;$$

$$\dot{U}_{ij} = \dot{V}_{ij} = \dot{W}_{ij} = \dot{\Psi}_{xij} = \dot{\Psi}_{yij} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N} \quad (11)$$

или

$$X_j = 0; \quad \dot{X}_j = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 5N.$$

Система дифференциальных уравнений (10), (11) далее решается одним из численных методов, в данной работе для этой задачи применяется метод Розенброка.

## 2. Результаты и обсуждение

Для демонстрации применимости описанной выше модели произведем расчет двояковыпуклой полой оболочки с учетом диссипации энергии с параметрами:  $h = 0,09$  м;  $a = b = 10,8$  м;  $R_1 = R_2 = 40,05$  м. Материал — стеклопластик Т10/УПЭ22-27

( $E_1 = 0,294 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2 = 0,178 \cdot 10^5$  МПа;  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,0301 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu = 0,123$ ,  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>), края конструкции закреплены шарнирно-неподвижно, нагрузка направлена по нормали к поверхности,  $q = A_1 t + q_{sv}$ ;  $A_1 = 10$  МПа/с, также учитывается собственный вес. Расчеты выполняются при  $N = 4$  в методе Л. В. Канторовича. Для демонстрации применимости описанной модели примем два варианта значения коэффициента  $c$ :  $c = 100$  Н  $\times$  с / м<sup>3</sup> = 0,0001 МПа  $\times$  с / м и  $c = 1000$  Н  $\times$  с / м<sup>3</sup> = 0,001 МПа  $\times$  с / м.

Решая систему дифференциальных уравнений, получим зависимость (рис. 1). Здесь синяя кривая — перемещение в четверти конструкции, красная — в центральной точке при  $c = 0,0001$  МПа  $\times$  с / м. Схожие данные получены и при выборе второго варианта коэффициента.

Как видно из графика, оболочка теряет устойчивость при нагрузке 0,45 МПа. Выберем одно из состояний системы, близкое к моменту потери устойчивости, и проанализируем колебательный процесс

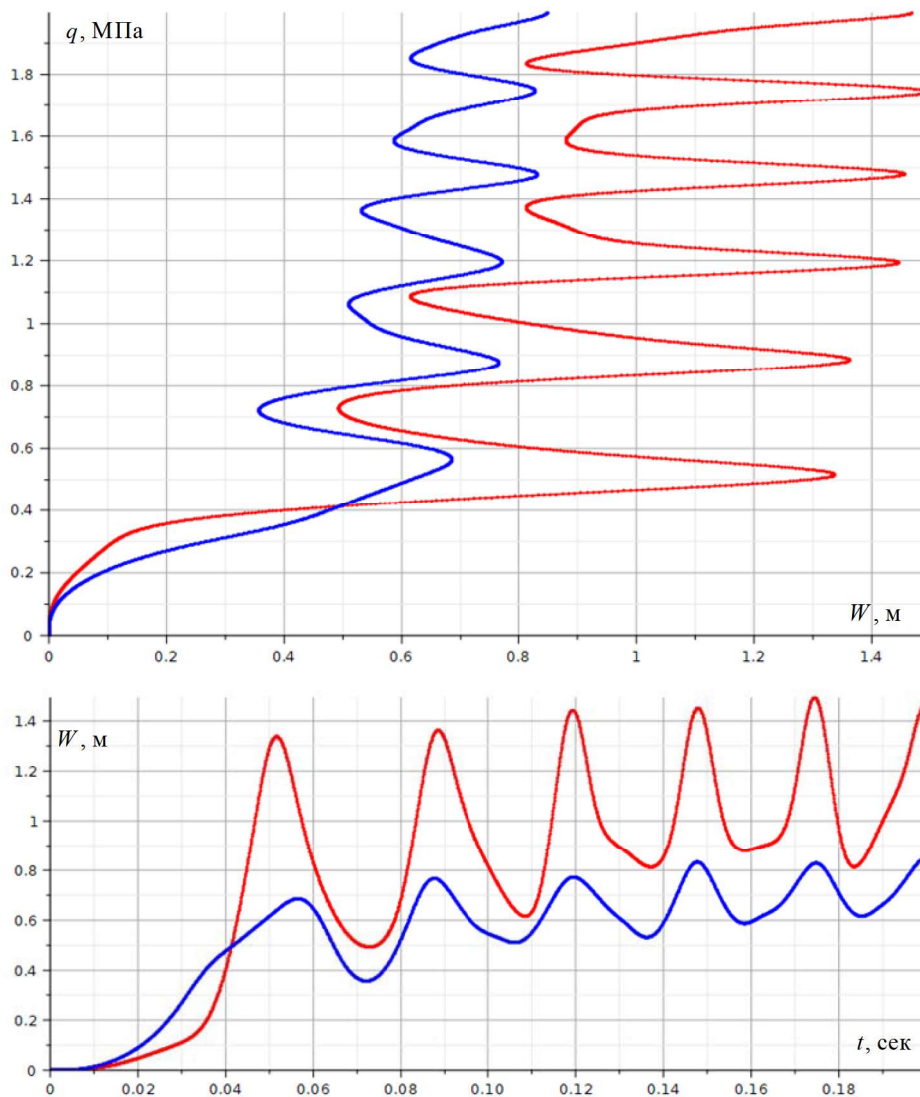


Рис. 1. Графики зависимостей «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » (сверху) и «прогиб  $W$  – время  $t$ » (снизу) при  $c = 0,0001$  МПа  $\times$  с / м

после снятия нагрузки. В качестве начальных данных для системы уравнений примем при  $t = 0,045$  с для компонент перемещений  $X_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, 5N$  — состояние системы в момент перед снятием нагрузки, а для скоростей их изменения  $\dot{X}_j = 0$ ;  $j = 1, 2, \dots, 5N$  — нулевые значения.

Полученный колебательный процесс показан на рис. 2 (продолжительность по времени выбрана разная). Помимо кривых для центральной точки и четверти, коричневым цветом показана кривая для восьмой части конструкции ( $x = a / 8$ ,  $y = b / 8$ ).

Очевидно, что при большем значении коэффициента  $c$  затухание колебаний происходит быстрее. Также можно заметить, что в разных частях оболочки при некоторых значениях времени амплитуда может иметь разный знак, что может приводить к существенному возрастанию напряжений. Приведенные расчетные данные показывают применимость предложенных автором модификаций математической модели и алго-

ритма и формируют основу для дальнейших более детальных исследований колебательных процессов в оболочечных конструкциях с учетом демпфирования.

#### Выводы

Анализ известных исследований, учитывающих потерю энергии при моделировании деформирования оболочек, показал, что единого подхода к учету диссипации энергии нет. В итоге для модификации разработанной ранее математической модели был выбран подход, основанный на добавлении в уравнения Эйлера–Лагранжа функции диссипации Рэлея, как наиболее близкий по формулировке к уже имеющимся соотношениям. Представленные примеры расчета показывают его применимость. Таким образом, была получена новая математическая модель, позволяющая исследовать более широкий класс задач. Тем не менее, использование других подходов и их сравнение между собой актуально и являются частью дальнейших исследований. Также остается

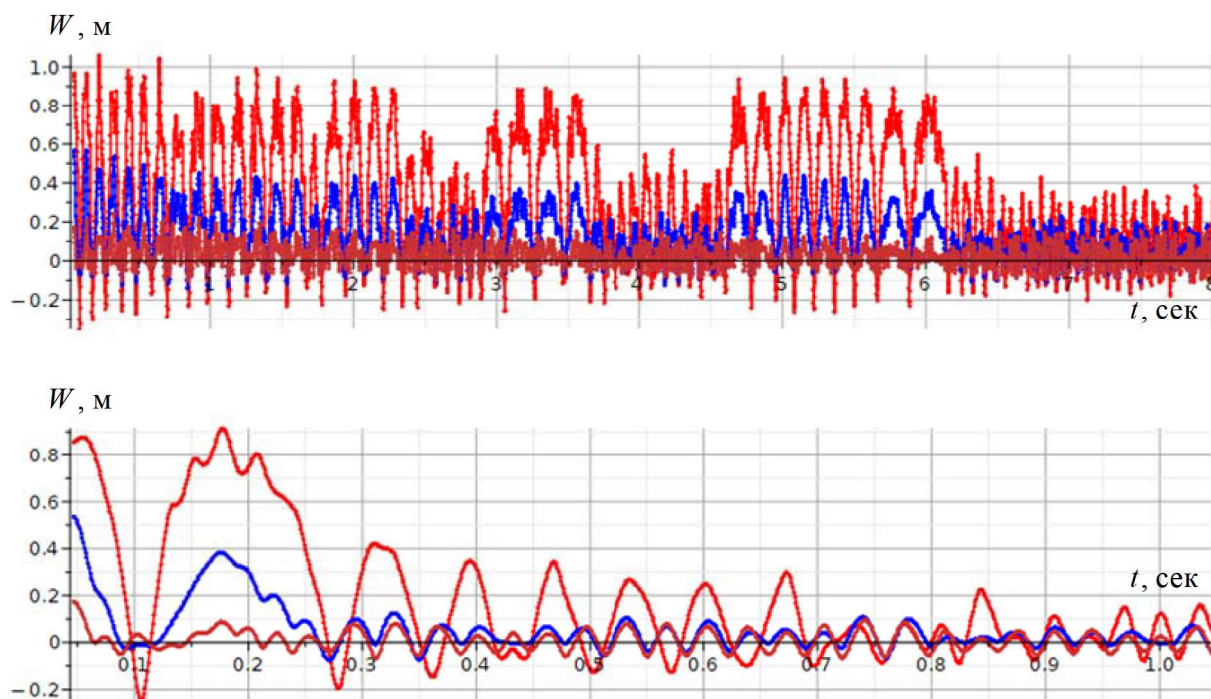


Рис. 2. Колебательный процесс после снятия нагрузки при  $c = 0,0001$  МПа  $\times$  с / м (сверху) и  $c = 0,001$  МПа  $\times$  с / м (снизу)

открытым вопрос выбора значения коэффициента, используемого в функции. Замечено, что в различных источниках он или имеет разную размерность (во многом из-за постановки задачи), или размерность не указана. В связи с этим возникают разночтения при поиске его возможных значений для разных материалов, а также осложняется процесс верификации результатов.

### Финансирование

Статья публикуется по результатам исполнения гранта СПбГАСУ 2025 года.

### Библиографический список

1. Karpov V. V., Kobelev E. A., Maslennikov A. M., Panin A. N. Ritz Method in the Discrete Approximation of Displacements for Slab Calculation // *Architecture and Engineering*. 2023. Vol. 8 (4). Pp. 57–67. DOI 10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67. EDN FTPEME.
2. Янковский А. П. Моделирование неизоотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба // *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки*. 2023. Т. 27, № 1. С. 119–141. DOI 10.14498/vsgtu1958. EDN YRWNPW.
3. Коровайцева Е. А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки*. 2021. Т. 25, № 3. С. 556–570. DOI 10.14498/vsgtu1855. EDN UKLUQJ.
4. Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E. Review of Nonlocal-in-Time Damping Models in the Dynamics of Structures // *Axioms*. 2023. Vol. 12 (7). 676. DOI 10.3390/axioms12070676. EDN DNTVCF.
5. Kandasamy S., Singh A. V. Transient Vibration Analysis of Open Circular Cylindrical Shells // *Journal of Vibration and Acoustics*. 2006. Vol. 128 (3). Pp. 366–374. DOI 10.1115/1.2172264.
6. Datta P., Ray M. C. Smart damping of large amplitude vibrations of variable thickness laminated composite shells // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 127. Pp. 710–727. DOI 10.1016/j.tws.2018.03.009. EDN YGULWX.
7. Wilson E. L., Penzien J. Evaluation of orthogonal damping matrices // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972. Vol. 4 (1). Pp. 5–10. DOI 10.1002/nme.1620040103.
8. Liew K. M., He X. Q., Ng T. Y., Kitipornchai S. Active control of FGM shells subjected to a temperature gradient via piezoelectric sensor/actuator patches // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002. Vol. 55 (6). Pp. 653–668. DOI 10.1002/nme.519.
9. Behjat B., Salehi M., Sadighi M., Armin A., Abbasi M. Static, Dynamic, and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Panels Using Finite Element Method // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2009. Vol. 20 (13). Pp. 1635–1646. DOI 10.1177/1045389X09104113. EDN NTGRAT.
10. Bajjad M. N. Analytical approach for damping model // *Asian Journal of Civil Engineering*. 2023. Vol. 24(1). Pp. 109–119. DOI 10.1007/s42107-022-00491-3. EDN ZBUZJL.
11. Pinho F. A. X. C., Amabili M., del Prado Z. J. G. N., da Silva F. M. A. Nonlinear forced vibration analysis of doubly curved shells via the parameterization method for invariant manifold // *Nonlinear Dynamics*. 2024. Vol. 112 (23). Pp. 20677–20701. DOI 10.1007/s11071-024-10135-7. EDN TQEXRH.
12. Touzé C., Amabili M., Thomas O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2008. Vol. 197 (21–24). Pp. 2030–2045. DOI 10.1016/j.cma.2008.01.002. EDN WOFWQZ.
13. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 264 (5). Pp. 1091–1125. DOI 10.1016/S0022-460X(02)01385-8. EDN XQDOKX.
14. Bui T. T., Vu M. D., Pham N. N., Cao V. D., Vu H. N. Nonlinear thermo-mechanical dynamic buckling and vibration of FG-GPLRC circular plates and shallow spherical shells resting on the nonlinear viscoelastic foundation // *Archive of Applied Mechanics*. 2024. Vol. 94. Pp. 3715–3729. DOI 10.1007/s00419-024-02691-6. EDN QSZFWZ.
15. Roy S., Bhadra S. Study of nonlinear dissipative pulse propagation under the combined effect of two-photon absorption and gain dispersion: A variational approach involving Rayleigh's dissipation function // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. Vol. 232 (2). Pp. 103–107. DOI 10.1016/j.physd.2007.06.002.
16. Scaife B. K. P. On the Rayleigh dissipation function for dielectric media // *Journal of Molecular Liquids*. 1989. Vol. 43. Pp. 101–107. DOI 10.1016/0167-7322(89)80010-8.
17. Lemos N. A. Remark on Rayleigh's dissipation function // *American Journal of Physics*. 1991. Vol. 59 (7). Pp. 660–661. DOI 10.1119/1.16791.
18. Hackl K., Svoboda J., Fischer F. D. On the coupling of Hamilton's principle and thermodynamic extremal

principles // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2024. Vol. 187. 105633. DOI 10.1016/j.jmps.2024.105633. EDN QRZDUS.

19. *Podio-Guidugli P., Virga E. G.* Analytical Thermodynamics // Journal of Elasticity. 2023. Vol. 153 (4–5). Pp. 787–812. DOI 10.1007/s10659-023-09997-6. EDN UYQNIT.

20. *Li H., Zou Z., Wu H., Zhao J., Sun H., Sun W., Wang Q., Wang X.* Theoretical and experimental investigations of vibration and damping behaviors of carbon fiber-reinforced composite thin shells with partial bolt looseness constraints // European Journal of Mechanics, A/Solids. 2023. Vol. 97. 104839. DOI 10.1016/j.euromechsol.2022.104839. EDN AQGPXM.

21. *Li H., Wu H., Zhang T., Wen B., Guan Z.* A nonlinear dynamic model of fiber-reinforced composite thin plate with temperature dependence in thermal environment // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 162. Pp. 206–218. DOI 10.1016/j.compositesb.2018.10.070.

22. *Maheri M. R., Adams R. D.* Modal Vibration Damping of Anisotropic FRP Laminates Using the Rayleigh–Ritz Energy Minimization Scheme // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259 (1). Pp. 17–29. DOI 10.1006/jsvi.2002.5151. EDN BVCVJB.

23. *Zinoviev P. A., Ermakov Yu. N.* Energy dissipation in composite materials. Lancaster: Technomic Publishing Company, 1994. 246 p.

24. *Zinoviev P. A., Smerdov A. A., Kulish G. G.* Experimental Investigation of Elastodissipative Characteristics of Carbon-Fiber-Reinforced Plastics // Mechanics of Composite Materials. 2003. Vol. 39 (5). Pp. 393–398. DOI 10.1023/B:MO CM.0000003289.12297.84. EDN LIEDXP.

25. *Adams R. D., Bacon D. G. C.* Effect of Fibre Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP // Journal of Composite Materials. 1973. Vol. 7 (4). Pp. 402–428. DOI 10.1177/002199837300700401.

26. *Yim J. H., Gillespie Jr J. W.* Damping characteristics of 0° and 90° AS4/3501-6 unidirectional laminates including the transverse shear effect // Composite Structures. 2000. Vol. 50 (3). Pp. 217–225. DOI 10.1016/S0263-8223(00)00087-8. EDN KULZOT.

27. *Zabaras N., Pervez T.* Viscous damping approximation of laminated anisotropic composite plates using the finite element method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1990. Vol. 81 (3). Pp. 291–316. DOI 10.1016/0045-7825(90)90058-T.

28. *Saravanos D. A., Chamis C. C.* An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures // Polymer Composites. 1990. Vol. 11 (6). Pp. 328–336. DOI 10.1002/pc.750110606.

29. *Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E.* Verification of the three-parameter nonlocal-in-time damping model by experimental data // 5th Novel Intelligent and Leading Emerging Sciences Conference (NILES). Giza, Egypt: IEEE, 2023. Pp. 373–376. DOI 10.1109/NILES59815.2023.10296585. EDN YQTZCT.

30. *Сидоров В. Н., Бадьина Е. С., Детина Е. П.* Численное моделирование колебаний композитных рамных конструкций с учетом демпфирования, нелокального во времени // Механика композиционных материалов и конструкций. 2022. Т. 28, № 4. С. 543–552. DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.04.543\_552.08. EDN ATPNW.

31. *Семенов А. А.* Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек // Вестник ПНИПУ. Механика. 2022. № 4. С. 90–102. DOI 10.15593/perm.mech/2022.4.09. EDN TFTIBY.

32. *Карпов В. В., Аристов Д. И., Овчаров А. А.* Особенности напряженно-деформированного состояния панелей ребристых оболочек вращения при динамическом нагружении // Вестник ТГАСУ. 2007. № 1. С. 94–101. EDN JUCZAN.

33. *Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСБ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с. EDN TVVJDV.

34. *Semenov A.* Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2022. Vol. 8 (4). Pp. 1343–1357. DOI 10.22055/jacm.2022.39718.3452. EDN DFGPJP.

## References

1. *Karpov V. V., Kobelev E. A., Maslennikov A. M., Panin A. N.* Ritz Method in the discrete approximation of displacements for slab calculation. *Architecture and Engineering*, 2023, vol. 8 (4), pp. 57–67. DOI 10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67.

2. *Yankovskiy A. P.* *Modelirovanie neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo povedeniya armirovannykh plogikh obolochek v ramkakh utochnennoy teorii izgiba* [Modeling of non-isothermal elastoplastic behavior of reinforced gently sloping shells within the framework of the refined bending theory]. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2023, vol. 27, no. 1, pp. 119–141. DOI 10.14498/vsgtu1958.

3. *Korovaytseva E. A.* *Primenenie metoda differentsirovaniya po parametru v reshenii nelineynykh zadach statsionarnoy dinamiki osesimmetrichnykh*

*myagkikh obolochek* [Application of the parameter differentiation method in solving nonlinear problems of stationary dynamics of axisymmetric soft shells]. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, no. 3, pp. 556–570. DOI 10.14498/vsgtu1855.

4. Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E. Review of nonlocal-in-time damping models in the dynamics of structures. *Axioms*, 2023, vol. 12 (7), p. 676. DOI 10.3390/axioms12070676.

5. Kandasamy S., Singh A. V. Transient vibration analysis of open circular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2006, vol. 128 (3), pp. 366–374. DOI 10.1115/1.2172264.

6. Datta P., Ray M. C. Smart damping of large amplitude vibrations of variable thickness laminated composite shells. *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 127, pp. 710–727. DOI 10.1016/j.tws.2018.03.009.

7. Wilson E. L., Penzien J. Evaluation of orthogonal damping matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972, vol. 4 (1), pp. 5–10. DOI 10.1002/nme.1620040103.

8. Liew K. M., He X. Q., Ng T. Y., Kitipornchai S. Active control of FGM shells subjected to a temperature gradient via piezoelectric sensor/actuator patches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 55 (6), pp. 653–668. DOI 10.1002/nme.519.

9. Behjat B., Salehi M., Sadighi M., Armin A., Abbasi M. Static, dynamic, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, vol. 20 (13), pp. 1635–1646. DOI 10.1177/1045389X09104113.

10. Bajad M. N. Analytical approach for damping mode. *Asian Journal of Civil Engineering*, 2023, vol. 24 (1), pp. 109–119. DOI 10.1007/s42107-022-00491-3.

11. Pinho F. A. X. C., Amabili M., del Prado Z. J. G. N., da Silva F. M. A. Nonlinear forced vibration analysis of doubly curved shells via the parameterization method for invariant manifold. *Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 112 (23), pp. 20677–20701. DOI 10.1007/s11071-024-10135-7.

12. Touzé C., Amabili M., Thomas O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, vol. 197 (21–24), pp. 2030–2045. DOI 10.1016/j.cma.2008.01.002.

13. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*,

2003, vol. 264 (5), pp. 1091–1125. DOI 10.1016/S0022-460X(02)01385-8.

14. Bui T. T., Vu M. D., Pham N. N., Cao V. D., Vu H. N. Nonlinear thermo-mechanical dynamic buckling and vibration of FG-GPLRC circular plates and shallow spherical shells resting on the nonlinear viscoelastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 2024, vol. 94, pp. 3715–3729. DOI 10.1007/s00419-024-02691-6.

15. Roy S., Bhadra S. Study of nonlinear dissipative pulse propagation under the combined effect of two-photon absorption and gain dispersion: A variational approach involving Rayleigh's dissipation function. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, vol. 232 (2), pp. 103–107. DOI 10.1016/j.physd.2007.06.002.

16. Scaife B. K. P. On the Rayleigh dissipation function for dielectric media. *Journal of Molecular Liquids*, 1989, vol. 43, pp. 101–107. DOI 10.1016/0167-7322(89)80010-8.

17. Lemos N. A. Remark on Rayleigh's dissipation function. *American Journal of Physics*, 1991, vol. 59 (7), pp. 660–661. DOI 10.1119/1.16791.

18. Hackl K., Svoboda J., Fischer F. D. On the coupling of Hamilton's principle and thermodynamic extremal principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2024, vol. 187, 105633. DOI 10.1016/j.jmps.2024.105633.

19. Podio-Guidugli P., Virga E. G. Analytical Thermodynamics. *Journal of Elasticity*, 2023, vol. 153 (4–5), pp. 787–812. DOI 10.1007/s10659-023-09997-6.

20. Li H., Zou Z., Wu H., Zhao J., Sun H., Sun W., Wang Q., Wang X. Theoretical and experimental investigations of vibration and damping behaviors of carbon fiber-reinforced composite thin shells with partial bolt looseness constraints. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2023, vol. 97, 104839. DOI 10.1016/j.euromechsol.2022.104839.

21. Li H., Wu H., Zhang T., Wen B., Guan Z. A nonlinear dynamic model of fiber-reinforced composite thin plate with temperature dependence in thermal environment. *Composites Part B: Engineering*, 2019, vol. 162, pp. 206–218. DOI 10.1016/j.compositesb.2018.10.070.

22. Maheri M. R., Adams R. D. Modal Vibration Damping of Anisotropic FRP Laminates Using the Rayleigh–Ritz Energy Minimization Scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 259 (1), pp. 17–29. DOI 10.1006/jsvi.2002.5151.

23. Zinoviev P. A., Ermakov Yu. N. Energy dissipation in composite materials. Lancaster, Technomic Publishing Company, 1994, 246 p.

24. Zinov'ev P. A., Smerdov A. A., Kulish G. G. Experimental investigation of elastodissipative characteristics of carbon-fiber-reinforced plastics. *Mechanics of Composite Materials*, 2003, vol. 39 (5), pp. 393–398. DOI 10.1023/B:MO CM.0000003289.12297.84.

25. Adams R. D., Bacon D. G. C. Effect of Fibre Orientation and Laminate Geometry on the Dynamic Properties of CFRP. *Journal of Composite Materials*, 1973, vol. 7 (4), pp. 402–428. DOI 10.1177/002199837300700401.
26. Yim J. H., Gillespie Jr J. W. Damping characteristics of 0° and 90° AS4/3501-6 unidirectional laminates including the transverse shear effect. *Composite Structures*, 2000, vol. 50 (3), pp. 217–225. DOI 10.1016/S0263-8223(00)00087-8.
27. Zabarar N., Pervez T. Viscous damping approximation of laminated anisotropic composite plates using the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, vol. 81 (3), pp. 291–316. DOI 10.1016/0045-7825(90)90058-T.
28. Saravanos D. A., Chamis C. C. An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures. *Polymer Composites*, 1990, vol. 11 (6), pp. 328–336. DOI 10.1002/pc.750110606.
29. Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E. Verification of the three-parameter nonlocal-in-time damping model by experimental data. *Proceedings of the 5th Novel Intelligent and Leading Emerging Sciences Conference (NILES)*, Giza, Egypt. IEEE, 2023, pp. 373–376. DOI 10.1109/NILES59815.2023.10296585.
30. Sidorov V. N., Badina E. S., Detina E. P. *Chislennoe modelirovanie kolebaniy kompozitnykh ramnykh konstruktsiy s uchetom dempfirovaniya, nelokal'nogo vo vremeni* [Numerical simulation of vibrations of composite frame structures taking into account damping, non-local in time]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy – Mechanics of composite materials and structures*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 543–552. DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.04.543\_552.08.
31. Semenov A. A. *Utochnenniy diskretniy metod rascheta podkreplennykh ortotropnykh obolochek* [Updated discrete method for calculation of supported orthotropic shells]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – Bulletin of PNIPU. Mechanics*, 2022, no. 4, pp. 90–102. DOI 10.15593/perm.mech/2022.4.09.
32. Karpov V. V., Aristov D. I., Ovcharov A. A. *Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya paneley rebristykh obolochek vrashcheniya pri dinamicheskom nagruzhenii* [Features of stress-strain state of ribbed shells of panels under dynamic loading]. *Vestnik TGASU – Bulletin of TSASU*, 2007, no. 1, pp. 94–101.
33. Karpov V. V., Ignat'ev O. V., Sal'nikov A. Yu. *Nelineynye matematicheskie modeli deformirovaniya obolochek peremennoy tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Nonlinear mathematical models of deformation of shells of variable thickness and algorithms for the study]. Moscow, ASV Publ.; St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2002, 420 p.
34. Semenov A. Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8 (4), pp. 1343–1357. DOI 10.22055/jacm.2022.39718.3452.