

© В. И. Смирнов, д-р техн. наук, профессор
© Е. Э. Намчыл, аспирант
(Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, john34441@yandex.ru

© V. I. Smirnov, Dr. Sci. Tech., Professor
© E. E. Namchyl, post -graduate student
(Petersburg State Transport University,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, john34441@yandex.ru

ЦИКЛИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

CYCLIC TENSION OF AN ELASTIC STRIP WITH AN ECCENTRIC CRACK

Изучается циклическая трещиностойкость упругой полосы с поперечной эксцентричной трещиной при растяжении. Для определения коэффициента интенсивности напряжений используется простой, но весьма эффективный инженерный метод, являющийся обобщением метода плоских сечений. Дана оценка интенсивности напряжений в каждой вершине трещины. Выполнено сравнение с известным классическим результатом, полученным в строгой математической форме. Установлена зависимость скорости роста трещины из обеих вершин от размера дефекта. Показана взаимосвязь числа циклов нагружения, необходимых для прироста трещины в заданных пределах, от величины эксцентриситета.

Ключевые слова: циклическая трещиностойкость, эксцентричная трещина, упругая растянутая полоса, коэффициент интенсивности напряжений, поперечная трещина в полосе.

The paper studies the cyclic crack resistance of an elastic strip with a transverse eccentric crack under tension. A simple yet highly effective engineering method, which is a generalization of the plane section method, is used to determine the stress intensity factor. The stress intensity at every crack tip is estimated and compared with a well-known classical result obtained in rigorous mathematical form. The dependence of the crack growth rate from both tips on the defect size is established. The relationship between the number of loading cycles required for crack growth within specified limits and the magnitude of the eccentricity is demonstrated.

Keywords: cyclic crack resistance, eccentric crack, elastic stretched strip, stress intensity factor, transverse crack in the strip.

Введение

Многие стальные элементы конструкций, в том числе стенки и полки двутавровых балок, например подкрановых [1], с достаточно высокой степенью достоверности могут быть представлены в виде упруго напряженных бесконечных полос с заданными граничными условиями. Бесконечная упругая полоса с поперечной трещиной в отличие от пластины неограниченных размеров может дать более реалистичное представление о напряженно-деформированном состоянии отдельных элементов конструкции. Так, в частности, поскольку в стенках и полках двутавровых балок отношение длины к ширине ве-

лико, влиянием ограниченных размеров по длине таких элементов можно пренебречь. Для оценки трещиностойкости подобных элементов конструкций используется коэффициент интенсивности напряжений (КИН), характеризующий напряженное состояние в вершине трещины. Далее рассматривается полоса с несимметричной трещиной, такие трещины часто встречаются в тонкостенных аэрокосмических конструкциях [2].

1. Коэффициент интенсивности напряжений для полосы с эксцентричной поперечной трещиной

Рассмотрим бесконечно длинную упругую полосу шириной $2h$ и толщиной t , растяну-

тую на удалении равномерной нагрузкой p . Полоса содержит поперечную эксцентричную трещину длиной $2a$ (рис. 1). Центр трещины сдвинут в сторону ее вершины A на величину ε . Наиболее точным значением КИН для этой конфигурации считается полученное в работе [3]. Однако решение приведено в форме рядов, коэффициенты которых надо брать из таблицы, что малопригодно в практических расчетах. В справочнике [4] приведены значения КИН, но также в табличной форме. В работе [5] несимметричная трещина в полосе рассматривается как частный случай узкого эллиптического выреза. Воспользуемся обобщенным методом плоских сечений [6]. Сечение полосы проводим в плоскости трещины.

Искомый КИН для каждой вершины трещины представим в виде

$$K_{IA} = K_I^\infty \cdot F_A, K_{IB} = K_I^\infty \cdot F_B, \quad (1)$$

где $K_I^\infty = p\sqrt{\pi a}$ — КИН для неограниченной плоскости; F_A, F_B — поправочные функции, учитывающие влияние границ полосы.

Используя решение для бесконечной пластины (трещина Гриффитса), разрывающее напряжение на продолжении трещины в полосе запишем в виде

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_{I(A,B)}}{\sqrt{\pi a}} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a,$$

где $K_{I(A,B)}$ — искомый КИН у вершины несимметричной трещины в полосе.

Запишем уравнения равновесия отсеченной половины полосы:

$$\sum Y = 0: t \int_a^{h-\varepsilon} \frac{K_{IA} x dx}{\sqrt{\pi a} \sqrt{x^2 - a^2}} + t \int_a^{h+\varepsilon} \frac{K_{IB} x dx}{\sqrt{\pi a} \sqrt{x^2 - a^2}} = K_I^\infty h t; \quad (2)$$

$$\sum M_0 = 0: t \int_a^{h-\varepsilon} \frac{K_{IA} x(x+\varepsilon) dx}{\sqrt{\pi a} \sqrt{x^2 - a^2}} = t \int_a^{h+\varepsilon} \frac{K_{IB} x(x-\varepsilon) dx}{\sqrt{\pi a} \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3) относительно $K_{I(A,B)}$, получим следующие выражения для поправочных функций:

$$\begin{aligned} F_A(\delta, \lambda) &= \frac{2}{(1-\delta) \left(\sqrt{1-\lambda^2} + \gamma \cdot \alpha / \beta \right)}; \\ F_B(\delta, \lambda) &= \frac{2}{(1-\delta) \left(\gamma + \beta / \alpha \cdot \sqrt{1-\lambda^2} \right)}; \\ \alpha &= \frac{(h-\varepsilon)^2}{2} \times \\ &\times \left[\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda^2 \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \right| + \frac{2\delta}{1-\delta} \sqrt{1-\lambda^2} \right]; \\ \beta &= \frac{(h-\varepsilon)^2}{2} \left[\frac{1+\delta}{1-\delta} \gamma + \lambda^2 \ln \left| \frac{1+\delta}{1-\delta} + \gamma \right| - \frac{2\delta}{1-\delta} \gamma \right]; \\ \lambda &= \frac{a}{h-\varepsilon}; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{h}; \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^2 - \lambda^2}. \quad (4) \end{aligned}$$

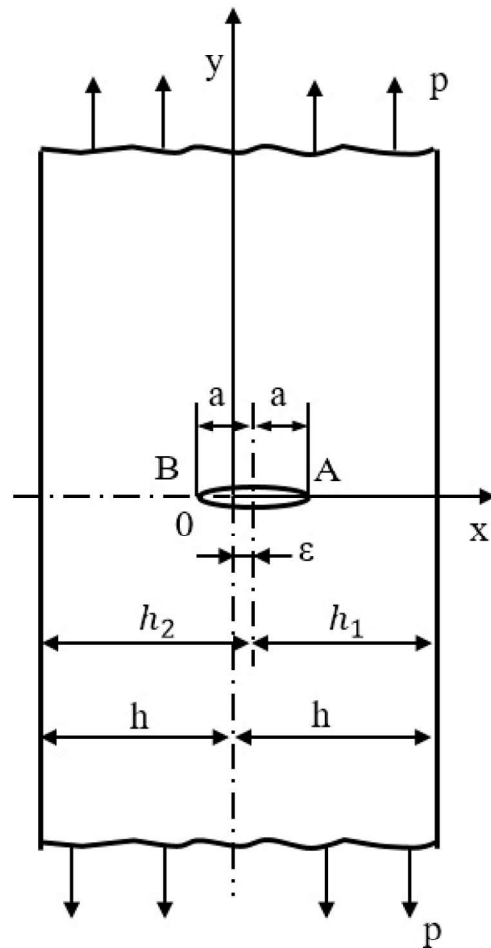


Рис. 1. Полоса с эксцентричной поперечной трещиной

Для центральной (симметричной) трещины $\varepsilon = \delta = 0$ получаем

$$F_A = F_B = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}; K_{IA} = K_{IB} = p\sqrt{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1-(a/h)^2}}.$$

Для полосы с центральной трещиной метод сечений, названный методом баланса сил, использован в работе [7], а также в работе [8], в которой он назван «crack line analysis method». Для прямоугольной пластины с несимметричной трещиной в работе [9] для приближенной оценки КИН используется метод весовых функций.

Поскольку $K_{IA} > K_{IB}$, в работе [6] определено значение КИН только для вершины А. Однако при циклическом нагружении трещина может распространяться при значениях K_I , намного меньших предельной статической трещиностойкости K_{Ic} (вязкость разрушения). В этом случае трещина будет расти в обе стороны, и поэтому необходимо располагать значениями КИН в двух вершинах.

На рис. 2, а, б показан характер изменения поправочных функций F_A и F_B в зависимости от параметра λ . Точками обозначены табличные значения этих функций, вычисленные в [4] по данным работы [3].

Как следует из рис. 2, для вершины А результаты вычислений по формуле (4) весьма близки к полученным в работе [3], особенно

для малых значений δ и λ . В то же время для вершины В наблюдается заметное отличие: при высоких значениях параметра λ значение поправочной функции F_B становится меньше единицы, то есть величина КИН для полосы в этом случае будет меньше таковой для бесконечной плоскости. Такой же результат получен в работах [10, 11]. Ситуация — когда одна из вершин удаляется от грани полосы (в данном случае вершина В) — объясняется в [3] следующим образом: трещина при высоком значении эксцентриситета «превращается» в полубесконечную трещину, перпендикулярную грани полуплоскости. Однако такой предельный переход представляется неочевидным. Подобная конфигурация может быть интерпретирована и другим образом: центр короткой трещины в очень широкой полосе перемещается к одной из граней, ширина полосы при этом остается неизменной, а изгибающий момент — конечным.

Приближенная формула для КИН в правой и левой вершинах трещины предложена также в работе [12]. Однако расчеты показывают, что она непригодна в связи с большой осцилляцией поправочной функции при малых значениях параметра λ . В работе [13] предложена эмпирическая формула для КИН, параметры которой подобраны из

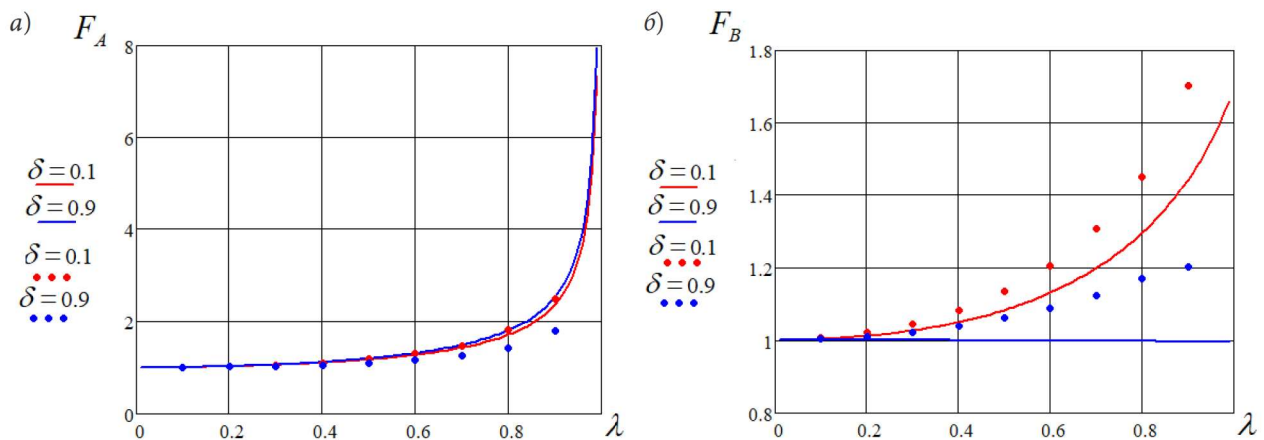


Рис. 2. Поправочная функция для КИН (сплошные линии — расчет по формуле (4); точки — по результатам вычислений [3, 4]): а — в вершине трещины А; б — в вершине трещины В

расчета наибольшего приближения к результатам работы [3].

Для примера на рис. 3 приведена зависимость КИН, построенная по формулам (1), (4), от размера трещины (полудлины a). Геометрические и механические характеристики полосы, принятые в расчете: ширина полосы $2b = 45$ мм, эксцентриситет $\varepsilon = 4,5$ мм, материал полосы — рельсовая сталь, вязкость разрушения (критическая трещиностойкость) $K_{Ic} = 32,2$ МПа $\sqrt{м}$, предел прочности при растяжении $\sigma = 777$ МПа, распределенная равномерная нагрузка $p = 10$ МПа (соответствует растягивающему напряжению в головке рельса от максимального обратного изгибающего момента, инициированного сосредоточенной силой (колесной нагрузкой) 112 кН).

2. Скорость роста усталостной трещины

При циклическом нагружении трещины нагрузкой интенсивностью p скорость ее подрастания можно приближенно оценить по формуле [14] в предположении, что значение КИН в каждом цикле достигает максимума, а при снятии нагрузки трещина полностью закрывается:

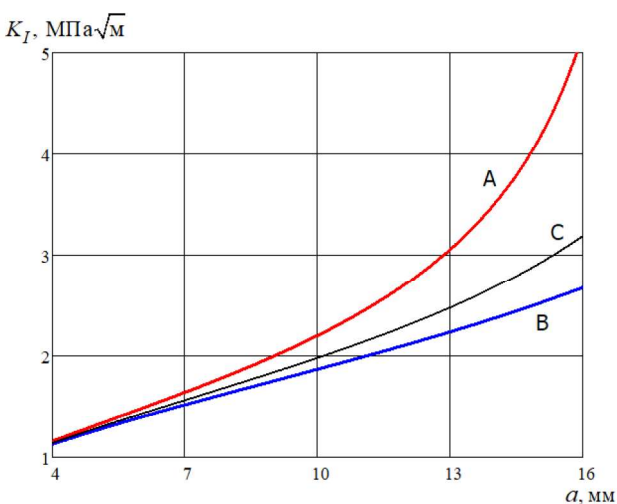


Рис. 3. Зависимость КИН от размера трещины:
A — вершина A (правая); B — вершина B (левая);
C — центральная трещина ($\varepsilon = 0$)

$$V = \frac{da}{dN} = d \left[\left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 + \ln \left[1 + \left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 \right] \right],$$

где N — количество циклов нагружения; d — структурный параметр, имеющий размерность длины $d = 2K_{Ic}^2 / (\pi\sigma_c^2)$; σ_c — предел прочности при растяжении.

На рис. 4 приведена скорость усталостного роста трещины для каждой из вершин, а также для сравнения скорость роста центральной трещины в пределах длины от $2a = 12$ мм до $2a = 32$ мм (~70 % от ширины полосы). Механические и геометрические характеристики полосы указаны выше.

Оценим количество циклов нагружения N , необходимое для прироста трещины в указанных пределах. Из-за большой неопределенности исходных данных при работе полосы как элемента конструкции в эксплуатационных условиях представляется нецелесообразным на каждом цикле пересчитывать скорость роста трещины и величину ее прироста. Вычислим величину N по средней скорости роста, которая будет разной в вершинах A и B. Количество циклов, определенное при таких условиях, приведено на рис. 5 в зависимости от величины эксцентриситета ε . На этом же графике показана для сравнения величина N для симметричной трещины. Очевидно, что остаточный ресурс полосы с несимметричной трещиной будет исчерпан раньше, чем такой же у полосы с центральной трещиной, причем эта разница быстро возрастает с увеличением степени асимметрии.

В работе [15] на основе экспериментов со стальными пластинами показано, что усталостные повреждения начинают формироваться с самого начала действия внешней силы (т. е. при $N \approx 0$) на микроуровне в зоне релаксации микроконцентраторов напряжений.

Заключение

Расположение трещины определенной длины относительно границ тела оказывает существенное влияние на коэффициент

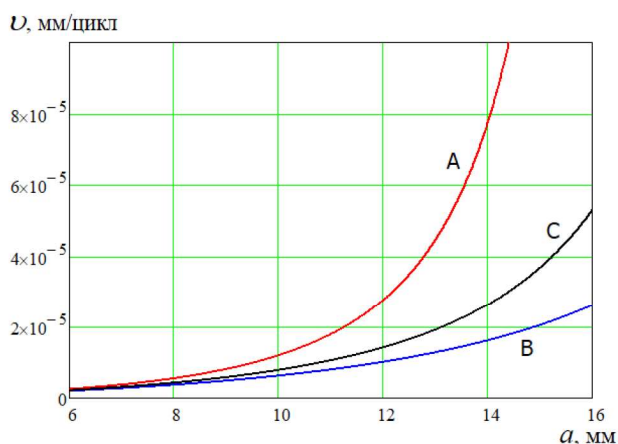


Рис. 4. Скорость роста усталостной трещины: A — вершина A (правая); B — вершина B (левая); C — центральная трещина ($\varepsilon = 0$)

интенсивности напряжений. Если для оценки статической трещиностойкости обычно достаточно рассматривать только вершину трещины с наибольшей интенсивностью напряжений, то при многоцикловом нагружении необходимо принимать во внимание напряженное состояние в каждой вершине. Нелинейная зависимость скорости роста

трещины от ее размера в определенных условиях стимулирует ускоренный усталостный рост дефекта при его асимметричном расположении относительно границ тела, что в конечном итоге определяет срок службы элемента конструкции.

Библиографический список

1. Москвичев В. В., Чабан Е. А. Анализ развития усталостных трещин в подкрановых балках // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84, № 7. С. 47–54.
2. Wang W., Rans C., Benedictus R. Analytical solutions for crack opening displacements of eccentric cracks in thin-walled metallic plates // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 123 (4). Pp. 371–381.
3. Isida M. Stress-intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip // Journal of Applied Mechanics. 1966. Vol. 33 (3). Pp. 674–675.
4. Саврук М. П. Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наукова думка, 1988. 620 с.
5. Luo L., Xiang Y., Wang Q. Z. Stress concentration factor expression for tension strip with eccentric elliptical

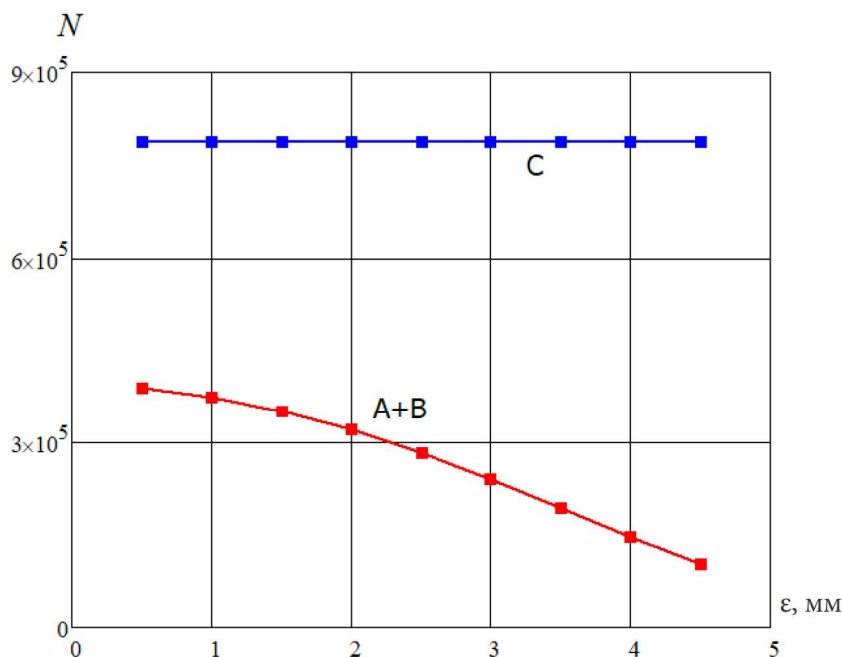


Рис. 5. Влияние эксцентриситета на остаточный ресурс полосы (в циклах нагружения): A+B — несимметричная трещина; C — симметричная трещина

hole // *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*. 2012. Vol. 33 (1). Pp. 117–128.

6. Бородачев Н. М., Кулий М. П. Обобщение метода плоских сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений // *Проблемы прочности*. 1982. № 2. С. 23–27.

7. Liu W. N. Stress ahead of the tip of a finite-width center-crack in fiber-reinforced composite specimen subjected to non-linearly distributed bridging stresses // *International Journal of Fracture*. 2001. Vol. 110. Pp. 29–35.

8. Yi Z., Li Y., Huang F., Wang M., Su K., Zhao C., Gu J. Analytical analysis on the Dugdale model of a finite-width cracked plate by using crack line analysis method // *AIP Advances*. 2020. Vol. 10 (11). URL: <https://doi.org/10.1063/5.0025749>.

9. Hu X. T., Jia X., Song Y. D. Weight Functions and Stress Intensity Factors for Eccentric through Cracks in a 3-D Rectangular Plate Subjected to In-Plane Loading // *Applied Mechanics and Materials*. 2016. Vol. 853. Pp. 8–14.

10. Wang Q. Z. The crack-line stress field method for analyzing SIFs of strips — illustrated with an eccentrically cracked tension strip // *International Journal of Fracture*. 1993. Vol. 59 (2). Pp. R39–R43.

11. Chen D. L., Weiss B., Stickler R. A new approach for the determination of stress intensity factors for finite width plate // *Engineering Fracture Mechanics*. 1994. Vol. 48 (4). Pp. 561–571.

12. Gray T. G. F. Convenient closed form stress intensity factors for common crack configurations // *International Journal of Fracture*. 1977. Vol. 13 (1). Pp. 65–75.

13. Складнев А. И. Коэффициенты интенсивности напряжений для полосы с поперечной трещиной при действии растягивающих напряжений // *Проблемы прочности материалов и конструкций в транспортном строительстве: сб. тр. междунар. науч.-практ. конф., посв. 175-летию со дня рождения профессора Н. А. Белелюбского*. Санкт-Петербург, 18–20 мая 2021 г. СПб.: ПГУПС, 2021. С. 171–179.

14. Смирнов В. И., Видюшенков С. А., Майер С. С. Усталостное разрушение балки с внутренней поперечной трещиной при многоцикловом нагружении // *Вестник гражданских инженеров*. 2020. № 2 (79). С. 75–81.

15. Плешанов В. С., Панин В. Е., Кибиткин В. В., Лебедева Н. А. Эволюция мезоструктуры и кинетика накопления усталостных повреждений в сварных соединениях конструкционной стали в условиях, близких к плоскому напряженному состоянию // *Физическая мезомеханика*. 2001. Т. 4, № 6. С. 105–117.

References

1. Moskvichev V. V., Chaban E. A. *Analiz razvitiya ustalostnykh treshchin v podkranovykh balkakh* [Analysis

of fatigue crack development in crane beams]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Factory Laboratory. Materials Diagnostics*, 2018, vol. 84, no. 7, pp. 47–54.

2. Wang W., Rans C., Benedictus R. Analytical solutions for crack opening displacements of eccentric cracks in thin-walled metallic plates. *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 123 (4), pp. 371–381.

3. Isida M. Stress-intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33 (3), pp. 674–675.

4. Savruk M. P. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Mechanics of fracture and strength of materials]. In 4 vols. Kiev, Naukova dumka. Vol. 2. *Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami* [Stress intensity coefficients in bodies with cracks]. 1988, 620 p.

5. Luo L., Xiang Y., Wang Q. Z. Stress concentration factor expression for tension strip with eccentric elliptical hole. *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, 2012, vol. 33 (1), pp. 117–128.

6. Borodachev N. M., Kuliy M. P. *Obobshchenie metoda ploskikh secheniy dlya opredeleniya koeffitsienta intensivnosti napryazheniy* [Generalization of the method of flat sections for determining the stress intensity coefficient]. *Problemy prochnosti – Strength Problems*, 1982, no. 2, pp. 23–27.

7. Liu W. N. Stress ahead of the tip of a finite-width center-crack in fiber-reinforced composite specimen subjected to non-linearly distributed bridging stresses. *International Journal of Fracture*, 2001, vol. 110, pp. 29–35.

8. Yi Z., Li Y., Huang F., Wang M., Su K., Zhao C., Gu J. Analytical analysis on the Dugdale model of a finite-width cracked plate by using crack line analysis method. *AIP Advances*, 2020, vol. 10 (11). Available at: <https://doi.org/10.1063/5.0025749>.

9. Hu X. T., Jia X., Song Y. D. Weight Functions and Stress Intensity Factors for Eccentric through Cracks in a 3-D Rectangular Plate Subjected to In-Plane Loading. *Applied Mechanics and Materials*, 2016, vol. 853, pp. 8–14.

10. Wang Q. Z. The crack-line stress field method for analyzing SIFs of strips — illustrated with an eccentrically cracked tension strip. *International Journal of Fracture*, 1993, vol. 59 (2), pp. R39–R43.

11. Chen D. L., Weiss B., Stickler R. A new approach for the determination of stress intensity factors for finite width plate. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, vol. 48 (4), pp. 561–571.

12. Gray T. G. F. Convenient closed form stress intensity factors for common crack configurations. *International Journal of Fracture*, 1977, vol. 13 (1), pp. 65–75.

13. Sklyadnev A. I. *Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy dlya polosy s poperechnoy treshchinoy pri*

deystvii rastyagivayushchikh napryazheniy [Stress intensity coefficients for a strip with a transverse crack under the action of tensile stresses]. *Problemy prochnosti materialov i konstruktsiy v transportnom stroitel'stve. Trudy mezhdunar. nauch.-prakt. konf., posvyashchennoy 175-letiyu so dnya rozhdeniya professora N. A. Bebel'yubskogo* [Problems of strength of materials and structures in transport construction. Proceedings of the International Scientific Practice conf., dedicated to the 175-th anniversary of the birth of Professor N. A. Bebel'yubsky]. St. Petersburg, May 2021, PGUPS Publ., 2021, pp. 171–179.

14. Smirnov V. I., Vidyushenkov S. A., Mayer S. S. *Ustalostnoe razrushenie balki s vnutrenney poperechnoy treshchinoy pri mnogotsiklovom nagruzhenii* [Fatigue

failure of a beam with an internal transverse crack during multi-cycle loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 2 (79), pp. 75–81.

15. Pleshanov V. S., Panin V. E., Kibitkin V. V., Lebedeva N. A. *Evolutsiya mezostrukturnoy i kinetika nakopleniya ustalostnykh povrezhdeniy v svarnykh soedineniyakh konstruktsionnoy stali v usloviyakh, blizkikh k ploskomu napryazhennomu sostoyaniyu* [Evolution of mesostructure and kinetics of fatigue damage accumulation in welded joints of structural steel under conditions close to a plane stress state]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*, 2001, vol. 4, no. 6, pp. 105–117.