

Строительная механика и расчет сооружений

УДК 624.046.2

DOI 10.23968/1999-5571-2026-23-3-50-63

© Е. В. Попов, канд. техн. наук, доцент

© E. V. Popov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© Д. А. Столыпин, аспирант

© D. A. Stolypin, post-graduate student

© А. В. Карельский, канд. техн. наук, доцент

© A. V. Karelskiy, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© И. А. Дурягин, аспирант

© I. A. Duryagin, post-graduate student

© А. О. Володин, аспирант

© A. O. Volodin, post-graduate student

© Б. В. Лабудин, д-р техн. наук, профессор
(Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова,
Архангельск, Россия)

© B. V. Labudin, Dr. Sci. Tech., Professor
(Northern (Arctic) Federal University
named after M. V. Lomonosov,
Arkhangelsk, Russia)

E-mail: EPV1989@yandex.ru, Stolypin.Denis.A@yandex.ru,

E-mail: EPV1989@yandex.ru, Stolypin.Denis.A@yandex.ru,

KAW_79@mail.ru, duryagin1995@yandex.ru,

KAW_79@mail.ru, duryagin1995@yandex.ru,

Itris_info@mail.ru, sevned@mail.ru

Itris_info@mail.ru, sevned@mail.ru

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СОСТАВНЫЕ СТЕРЖНИ НА ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЯХ

CURVED COMPOSITE RODS ON FLEXIBLE CONNECTIONS

Приводится метод расчета криволинейных составных элементов из трансверсально-изотропного материала с постоянным радиусом изгиба на упруго-податливых связях сдвига, который является развитием и уточнением классической теории расчета составных стержней А. Р. Ржаницына применительно к таким элементам. Податливость связей учитывается только в тангенциальном направлении — по касательной к точкам в швах между соединяемыми слоями. Связи в радиальном направлении принимаются абсолютно жесткими, что справедливо в случае приложения преобладающей доли вертикальных нагрузок к верхнему слою, вызывающих его прижим к нижнему, так как в таком случае функцию поперечных связей будут выполнять контактирующие поверхности слоев. Для решения задачи используется метод сил. В качестве основного неизвестного принимается функция распределения суммарных усилий сдвига вдоль касательных к точкам вдоль швов сплачивания слоев. Приводится пример расчета криволинейного составного элемента из двух слоев на прочность и вертикальные перемещения. Проведен анализ влияния на НДС элемента таких факторов, как жесткость связей сдвига, радиус кривизны, наличие распора.

Ключевые слова: криволинейные элементы, составные трансверсально-изотропные стержни, связи сдвига, прочность, жесткость, податливость, напряженно-деформированное состояние, распор, метод сил.

A method for calculating curved composite transversely isotropic rods with a constant bending radius on elastic shear bonds is presented, which is a refinement of the classical theory of calculation of composite rods by A. R. Rzhantsyn in relation to such rods. The compliance of connections is taken into account only in the tangential direction — along the tangent to the points in the joints between the connected layers. The connections in the radial direction are assumed to be absolutely rigid, which is true when the predominant share of vertical loads is applied to the upper layer, causing it to be pressed against the lower layer, since in this case the function of transverse connections will be performed by the contacting surfaces of the layers. The force method is used to solve the problem. The main unknown is the distribution function of the total shear forces along the tangents to the points along the joints connecting the layers. An example of calculating the strength and vertical displacements of a curved composite element composed of two layers is provided. An analysis has been made to determine the influence of factors such as shear bond stiffness, radius of curvature, and the presence of thrust on the stress-strain state of an element.

Keywords: curved elements, composite transversely isotropic rods, shear bonds, strength, stiffness, flexibility, stress-strain state, thrust, method of forces.

Введение

Одним из первых ученых, занимавшихся расчетами составных стержней, был Фридрих Энгессер. Он принимал составной стержень как монолитный, но понижал модуль сдвига материала, вывел формулу для приведенного модуля упругости. Развитию этой теории посвящены работы С. П. Тимошенко, Р. Мизеса и Р. Ратцердорфера (см. [1]). Позже была выявлена ошибочность теории Энгессера, так как им было использовано допущение о пропорциональности сдвигов поперечной силе, неправомерное в случае составных стержней на податливых связях сдвига. Из более поздних работ первой половины XX века можно выделить труды таких ученых, как Н. Мюллер-Бреслау, А. Лjungберг, Л. Грюнинг, И. Арновлевич, В. И. Ратнер, а также ученых Иллинойского и Орегонского университетов США [2]. Результаты их исследований стали базой для формирования первых методик расчета прочности сечений составных элементов, в частности деревобетонных. Эти теории расчета были далеки от совершенства, так как формировались в предположении упругой работы материалов, и весь расчет сводился к определению краевых напряжений и сравнению их с предельно допустимыми значениями.

В 1948 г. вышел фундаментальный труд А. Р. Ржаницына по расчету составных стержней и пластин [3]. В нем составной элемент представлялся в виде слоев, разделенных швами нулевой толщины с непрерывно расставленными связями сдвига, жесткость которых неизменна по длине шва. Задача сводилась к решению системы дифференциальных уравнений, составленных для каждого шва. В 1986 г. вышло обновленное издание данной книги, в котором были рассмотрены дополнительные вопросы (в частности, пространственная работа и кручение тонкостенных составных стержней).

В работе П. Ф. Плешкова, изданной в 1952 г. [4], содержится теория расчета сос-

тавных стержней при различных компоновках элементов, их составляющих. Такой стержень рассматривается здесь как единый элемент, напряженное состояние которого определяется одним дифференциальным уравнением его деформированной оси.

В 1990 г. Ю. Е. Якубовским [5] была предложена математическая модель нелинейного изгиба многослойной составной пластины. Позднее, совместно с Б. А. Гуляевым, решение было распространено на случай ортотропии связей сдвига [6] и разномодульности материала пластин при растяжении-сжатии [7–10]. В исследовании О. О. Булановой (1995 г.) [11] в развитие теории А. Р. Ржаницына представлен алгоритм расчета физически нелинейных конструктивно анизотропных составных пластинок.

В работе [12] Д. В. Леоненко рассмотрены задачи динамического расчета трехслойных стержневых элементов со сжимаемой прослойкой при свободных и несвободных колебаниях.

Из последних фундаментальных трудов, посвященных расчету составных стержней и пластин, стоит выделить работы В. В. Филатова и Р. Ф. Габбасова [13, 14]. Авторами рассмотрен обширный перечень задач расчета составных элементов на податливых связях: составные балки на упругом основании, неразрезные составные балки, расчет составных стержней и пластин на устойчивость и динамические нагрузки, учет трещинообразования, стержни переменного сечения и др. Все вопросы рассмотрены в предположении абсолютной жесткости поперечных связей и упругой податливости связей сдвига.

Несмотря на достаточно обширный перечень задач, рассмотренных в вышеперечисленных и многих других научных работах [15–19] применительно к составным прямолинейным стержням, отсутствуют работы, посвященные составным элементам с криволинейной осью. К таким конструкциям можно отнести:

- составные изгибаемые элементы со значительным выгибом или строительным подъемом;

- клееные деревянные арки, верхние пояса полигональных ферм, ребра куполов — при наличии дефектов в виде непрочности и трещин, в том числе усиленные постановкой механических нагелей или винтов, а также методом наращивания сечения при отсутствии жестких на сдвиг связей между слоями;

- большепролетные балки и плиты из деревобетона и сталебетона с гибкими анкерными упорами, работающие при значительных прогибах, жесткие составные ванты;

- сжатые составные стержни на податливых связях при определении действительных резервов несущей способности и устойчивости, т. е. при значительном искривлении продольной оси.

Таким образом, развитие и уточнение теории расчета составных стержней применительно к криволинейным элементам является актуальной задачей.

Методика

В криволинейном стержне с абсолютно жесткими поперечными связями упруго-податливые связи сдвига будут деформироваться по дуге окружностей швов между слоями. В качестве основной системы для такого стержня принимается пакет из $n + 1$ криволинейных слоев с количеством швов, равным n (рис. 1). За искомые неизвестные принимаются касательные к дугам окружности швов усилия τ , которые по аналогии с классической теорией составных стержней А. Р. Ржаницына будут называться сдвиговыми напряжениями. При построении методики вводится ряд допущений:

1. Связи в радиальном направлении принимаются абсолютно жесткими. Роль поперечных связей выполняют прижатые друг к другу по всей длине поверхности слоев, выполняющие функцию жестких поперечных связей сдвига, которые направлены вдоль радиуса кривизны ρ .

2. Для слоев выполняется соотношение $h/\rho \leq 0,1$, таким образом, в пределах высоты каждого слоя считается справедливой гипотеза плоских сечений, деформации волокон при действии изгибающего момента пропорциональны расстоянию от нейтральной линии до соответствующего волокна, измеренному вдоль радиуса кривизны слоя ρ_i [20].

3. Влияние сдвиговых деформаций на прогибы мало по сравнению с влиянием изгибающих моментов.

4. Начальная кривизна слоев ввиду незначительности деформаций и перемещений в процессе нагружения не изменяется.

5. Материал слоев трансверсально-изотропный, однородный (однородный).

Радиус начальной кривизны для каждого слоя обозначим как ρ_i , а для каждого шва — R_i ($R_i = \rho_i + b_i$) оси, и будем производить их отсчет от единого для всех слоев составного стержня центра кривизны. Символом ε обозначим деформации волокон в направлении касательной к сечению с координатой φ , возникающие за счет действия нормальных усилий (с учетом проекций поперечных сил) и изгибающих моментов.

Разницу деформаций волокон i -го и $(i + 1)$ -го слоев, расположенных по обе стороны разделяющего i -го шва, можно представить в виде $\Gamma'_i = \varepsilon_i^H - \varepsilon_{i+1}^B$ и, выразив деформации волокон слоев, примыкающих к швам, через жесткости слоев и силовые факторы, получить выражение

$$\Gamma'_i = \frac{N_i^0}{E_i F_i} - \frac{N_{i+1}^0}{E_{i+1} F_{i+1}} - M^0 \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1,M}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right) - \frac{T_{i+1}}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{T_i}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{T_i}{E_i F_i} - \frac{T_{i-1}}{E_i F_i} + \sum_{j=1}^n T_j c_j \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right), \quad (1)$$

где $N_i^0 = N_i^0(\varphi)$ — функция продольной силы в i -м слое; $T_i = T_i(\varphi)$ — алгебраическая сумма сдвигающих усилий в связях, «накопленных»

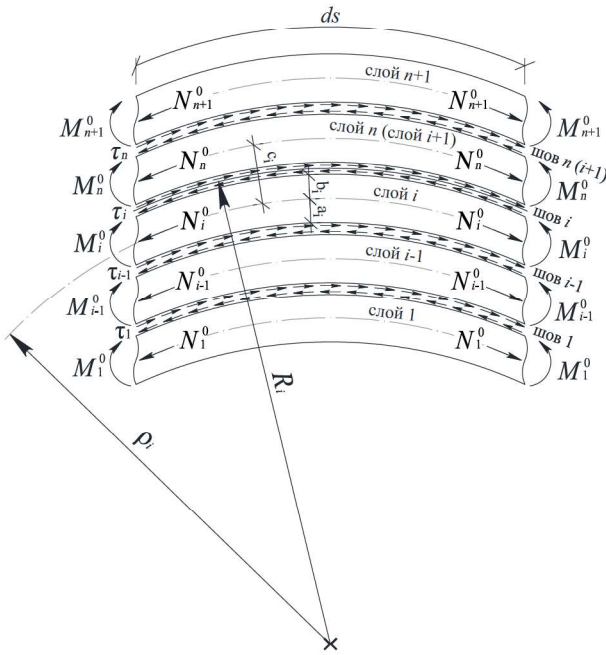


Рис. 1. Расчетная схема криволинейного составного элемента

в i -м шве по длине дуги от начала стержня или рассматриваемого участка стержня до сечения с координатой φ ; a_i , b_i — расстояние от нейтральной линии i -го слоя до крайнего нижнего и верхнего волокна соответственно; α_i — коэффициент, учитывающий долю проекции суммарной внешней нагрузки, действующей в радиальном направлении и воспринимаемой i -м слоем в основной системе, который определяется по формуле

$$\alpha_{i,M} = \frac{E_i I_i}{\Sigma EI}, \quad (2)$$

где E_i — модуль Юнга материала i -го слоя; I_i — момент инерции поперечного сечения i -го слоя; ΣEI — изгибная жесткость составного стержня в основной системе.

Функции поперечной (Q) и продольной (N) силы в i -м слое определяем по формулам:

$$Q_i^0(\varphi) = \alpha_{i,M} \left[V_A \cos(\theta - \varphi) - H_A \sin(\theta - \varphi) - \int_0^\varphi \sum q(\bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \right]; \quad (3)$$

$$N_i^0(\varphi) = -\alpha_{i,N} (V_A \sin(\theta - \varphi) + H_A \cos(\theta - \varphi)) + (\rho_i + b_i) \int_0^\varphi n_i(\bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad (4)$$

где Σq — суммарная проекция внешней нагрузки, действующей радиально к поверхностям слоев криволинейного стержня; n_i — проекция внешней нагрузки, приложенной к i -му слою, на тангенциальное направление относительно оси этого слоя; $\bar{\varphi}$ — вспомогательная переменная интегрирования; $\alpha_{i,N}$ — коэффициент, учитывающий долю проекции опорных реакций на касательную к оси слоя в опорном сечении, воспринимаемых i -м слоем в основной системе. Этот коэффициент определяется по формуле (5), где доля опорных реакций воспринимается только теми стержнями, на торец которых нагрузка (реакция) передается нормально к плоскости торца. В противном случае (если какой-либо слой не доходит до упора) $\alpha_{i,N} = 0$.

$$\alpha_{i,N} = \frac{E_i F_i}{\Sigma EI}, \quad (5)$$

где F_i — площадь поперечного сечения i -го слоя.

Изгибающий момент, возникающий в основной системе от внешней нагрузки M^0 , можно выразить, пользуясь так называемой «балочной аналогией» с заменой линейной координаты x , отсчитываемой вдоль хорды длиной L , на угловую координату φ . Для пологих стержней при $\rho/L \geq 10$ произвести эту замену можно следующим образом: координата x равна проекции дуги на хорду, т. е. длине отрезка, ограниченного вертикальной линией, проведенной через точку пересечения следа приложения нагрузки и радиуса (рис. 2): $\frac{x}{L} = \frac{\varphi}{2\theta} \rightarrow \varphi = \frac{2\theta x}{L}$ и $x(\varphi) = \frac{\varphi L}{2\theta}$. Точное решение получается при использовании выражения $x_i(\varphi) = \rho_i [\sin \theta - \sin(\theta - \varphi)]$.

Выразив деформации в швах через сдвигающие напряжения и погонный модуль жесткости связей сдвига $\Gamma_i = \frac{1}{\xi_i} \tau_i = \frac{1}{\xi_i} \frac{dT_i}{ds} = \frac{1}{\xi_i} \frac{dT_i}{R_i d\varphi} \rightarrow \Gamma_i' = \frac{T_i''(\varphi)}{R_i^2 \xi_i}$ и подставив второе выражение в формулу (1), получим дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции T_i . При

$\xi_i = \text{const}$ и $\rho_i = \text{const}$, т. е. для швов с постоянной жесткостью связей по длине и кривизной слоев получается уравнение для i -го шва:

$$\begin{aligned} \frac{T_i''}{R_i^2 \rho_i} = & \frac{N_i^0}{E_i F_i} - \frac{N_{i+1}^0}{E_{i+1} F_{i+1}} - \\ & - M^0 \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right) - \frac{T_{i+1}}{E_{i+1} F_{i+1}} + \\ & + \frac{T_i}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{T_i}{E_i F_i} - \frac{T_{i-1}}{E_i F_i} + \\ & + \sum_{j=1}^n T_j c_j \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где R_i — радиус кривизны i -го слоя; M^0 — изгибающий момент в основной системе.

Функции искомых неизвестных и силовые факторы в данном уравнении выражаются через угловую координату φ . Составляя такие уравнения для каждого шва, можем получить систему дифференциальных уравнений, которую запишем в общепринятых обозначениях метода сил для каждого шва:

$$\begin{cases} \delta_{11} T_1 + \delta_{12} T_2 + \dots \delta_{1n} T_n + \Delta_{10} - T_1'' / (R_1^2 \xi_1) = 0; \\ \delta_{21} T_1 + \delta_{22} T_2 + \dots \delta_{2n} T_n + \Delta_{20} - T_2'' / (R_2^2 \xi_2) = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} T_1 + \delta_{n2} T_2 + \dots \delta_{nn} T_n + \Delta_{n0} - T_n'' / (R_n^2 \xi_n) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где Δ_{i0} — грузовые члены метода сил; δ_{ij} — коэффициенты при неизвестных (коэффициенты матрицы податливости); ξ — погонная жесткость связей сдвига, определяемая по формуле (9).

$$\begin{aligned} \Delta_{i0} = & \frac{N_i^0 - Q_i^0}{E_i F_i} - \frac{N_{i+1}^0 - Q_{i+1}^0}{E_{i+1} F_{i+1}} - \\ & - M^0 \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right); \\ \delta_{i,i-1} = & \delta_{i-1,i} = -\frac{1}{E_{i-1} F_{i-1}} + \\ & + c_{i-1} \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right); \\ \delta_{i,i} = & \frac{1}{E_i F_i} + \frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + c_i \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right); \\ \delta_{i,i+1} = & \delta_{i+1,i} = -\frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + \\ & + c_{i+1} \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right); \\ \delta_{i,n} = & \delta_{n,i} = c_n \left(\frac{\alpha_{i,M} \cdot b_i}{E_i I_i} + \frac{\alpha_{i+1,M} \cdot a_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Погонная жесткость ξ_i равномерно распределенных по длине i -го шва связей сдвига определяется по формуле

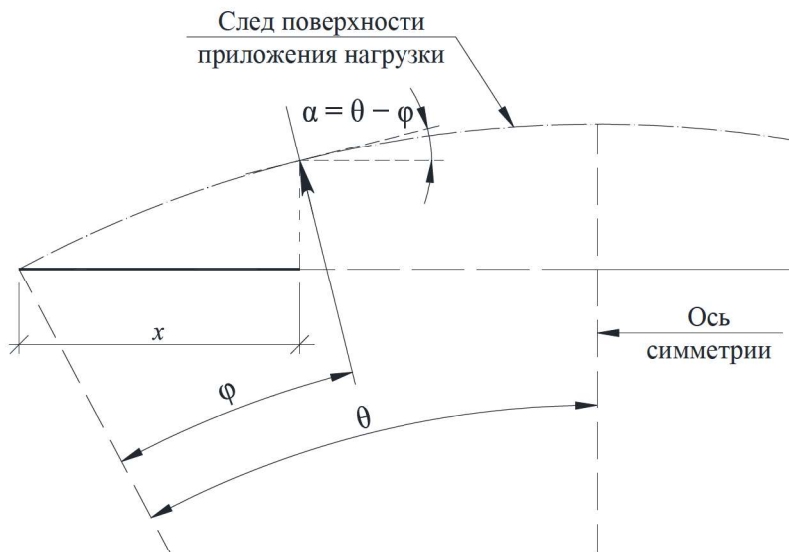


Рис. 2. Схема перехода от линейной координаты x к угловой координате φ

$$\xi_i = \frac{C_i}{R_i \cdot \Delta\varphi_{c,i}}, \quad (9)$$

где C_i — жесткость дискретных связей i -го шва, кН/м; R_i — радиус кривизны i -го шва; $\Delta\varphi_{c,i}$ — угол (рад.) между радиусами, проведенными из центра дуги шва криволинейного стержня через две соседние дискретно расположенные связи сдвига.

При отсутствии распора после решения системы уравнений (7) задача становится статически определимой. Усилия и напряжения в слоях определяются с учетом касательных напряжений в связях сдвига в рассматриваемом сечении $\tau(\varphi)$.

Продольную и поперечную силу в рассматриваемом сечении с учетом усилий в связях сдвига можно определить по формулам

$$N_i(\varphi) = N_i^0(\varphi) + \int_0^\varphi \tau_i(\bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} - \int_0^\varphi \tau_{i-1}(\bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}; \quad (10)$$

$$Q_i(\varphi) = Q_i^0(\varphi) - \int_0^\varphi \tau_i(\bar{\varphi}) \sin(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} + \int_0^\varphi \tau_{i-1}(\bar{\varphi}) \sin(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad (11)$$

где τ_i — функция распределения касательных напряжений в i -м шве, $\tau_i = T'_i$.

Изгибающий момент в i -м слое в сечении с координатой φ определяется по формуле

$$M_i(\varphi) = \alpha_i \left(M^0(\varphi) - \sum_{j=1}^n T_j(\varphi) c_j \right). \quad (12)$$

Нормальные напряжения в слоях определяются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \pm \frac{M_i \cdot z_i}{I_i}, \quad (13)$$

где z_i — расстояния от нейтральной линии i -го слоя до рассматриваемого волокна.

Обсуждение

В качестве примера рассмотрена следующая задача: криволинейный составной элемент сечением $h_1 = 150$ мм, $b_1 = 100$ мм, с радиусом изгиба в уровне нейтральной линии ρ_1 (далее слой $i = 1$) усилен путем по-

становки сверху дополнительного элемента (далее слой $i = 2$), прикрепленного упруго-податливыми связями сдвига, с размерами поперечного сечения $h_2 = 100$ мм, $b_2 = 100$ мм и радиусом изгиба ρ_2 (рис. 3).

Пролет конструкции $L = 4$ м (длина хорды оси нижнего элемента $i = 1$). Сверху действует равномерно распределенная погонная нагрузка $q_0 = 5$ кН/(п. м). Максимальная высота подъема слоя $i = 1$ составляет H , м, в уровне нейтральной линии в середине пролета. Центральный угол раскрытия дуги обозначен как 2θ . Материал слоев — клееная древесина с модулем упругости $E = 10$ ГПа.

Конструкция имеет раскрепление от изгиба сжатой части слоев из плоскости изгиба. Жесткость связей сдвига ξ не меняется по длине шва сплачивания слоев и рассматривается в диапазоне значений $\xi = 5 \cdot 10^3 \dots 5 \cdot 10^4$ кН/м², также анализируются предельные случаи — отсутствие связей сдвига ($\xi = 0$) и абсолютно жесткий шов ($\xi \rightarrow \infty$).

Рассчитываются следующие конфигурации опорных узлов:

- правая скользящая опора и отсутствие сдвиговых упоров;
- неподвижные опоры и отсутствие сдвиговых упоров;
- неподвижные опоры и сдвиговые упоры, препятствующие взаимному сдвигу слоев на торцах.

Площадь сечения слоев:

$$F_1 = 0,15 \cdot 0,1 = 0,015 \text{ м}^2; F_2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ м}^2.$$

Моменты инерции сечения поперечного сечения слоев:

$$I_1 = \frac{0,1 \cdot 0,15^3}{12} = 2,81 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$I_2 = \frac{0,1 \cdot 0,1^3}{12} = 8,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Изгибная жесткость слоев:

$$EI_1 = 281 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; EI_2 = 83,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Коэффициенты, учитывающие доли воспринимаемой поперечной нагрузки в основной системе:

$$\alpha_{1,M} = \frac{281}{281 + 83,3} = 0,77; \alpha_{2,M} = \frac{83,3}{281 + 83,3} = 0,23.$$

Коэффициенты, учитывающие доли воспринимаемой продольной нагрузки, вызываемой силами распора (при наличии упора для слоя $i = 2$):

$$\alpha_{1,N} = \frac{0,015}{0,015+0,01} = 0,6; \alpha_{2,N} = \frac{0,01}{0,015+0,01} = 0,4.$$

Функции внешней нагрузки (внешняя нагрузка приложена к верхней грани слоя $i = 2$):

$$q(\varphi) = q_0(\varphi) \cdot \cos(\theta - \varphi); n_1(\varphi) = 0;$$

$$n_2(\varphi) = q_0 \cdot \sin(\theta - \varphi).$$

Коэффициенты, учитывающие доли воспринимаемой опорной реакции: $\alpha_{1,N} = 1$; $\alpha_{2,N} = 0$, так как верхний элемент не упирается в стальную плиту на опоре.

Функции, описывающие распределение силовых факторов в основной системе:

$$Q_{01}(\varphi) = \alpha_{1,M} [V_A \cos(\theta - \varphi) - H_A \sin(\theta - \varphi)] -$$

$$-\alpha_{1,M} \cdot \rho_1 \int_0^{\varphi} q(\bar{\varphi}) \cos(\theta - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi};$$

$$Q_{01}(\varphi) = \alpha_{2,M} [V_A \cos(\theta - \varphi) - H_A \sin(\theta - \varphi)] -$$

$$-\alpha_{2,M} \cdot \rho_1 \int_0^{\varphi} q(\bar{\varphi}) \cos(\theta - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi};$$

$$N_{01}(\varphi) = \alpha_{1,N} [V_A \sin(\theta - \varphi) + H_A \cos(\theta - \varphi)];$$

$$N_{02}(\varphi) = \alpha_{2,N} [V_A \sin(\theta - \varphi) + H_A \cos(\theta - \varphi)] -$$

$$-\rho_1 \int_0^{\varphi} n_2(\bar{\varphi}) \cos(\theta - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}.$$

Для системы с подвижной левой опорой $V_A = \frac{q_0 \cdot L}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ кН}$, $H_A = 0$.

Система (7) в данном случае будет иметь только одно уравнение, составленное для одного шва между слоями:

$$T_1'' / (R^2 \xi_1) = \delta_{11} T_1 + \Delta_{10}. \quad (14)$$

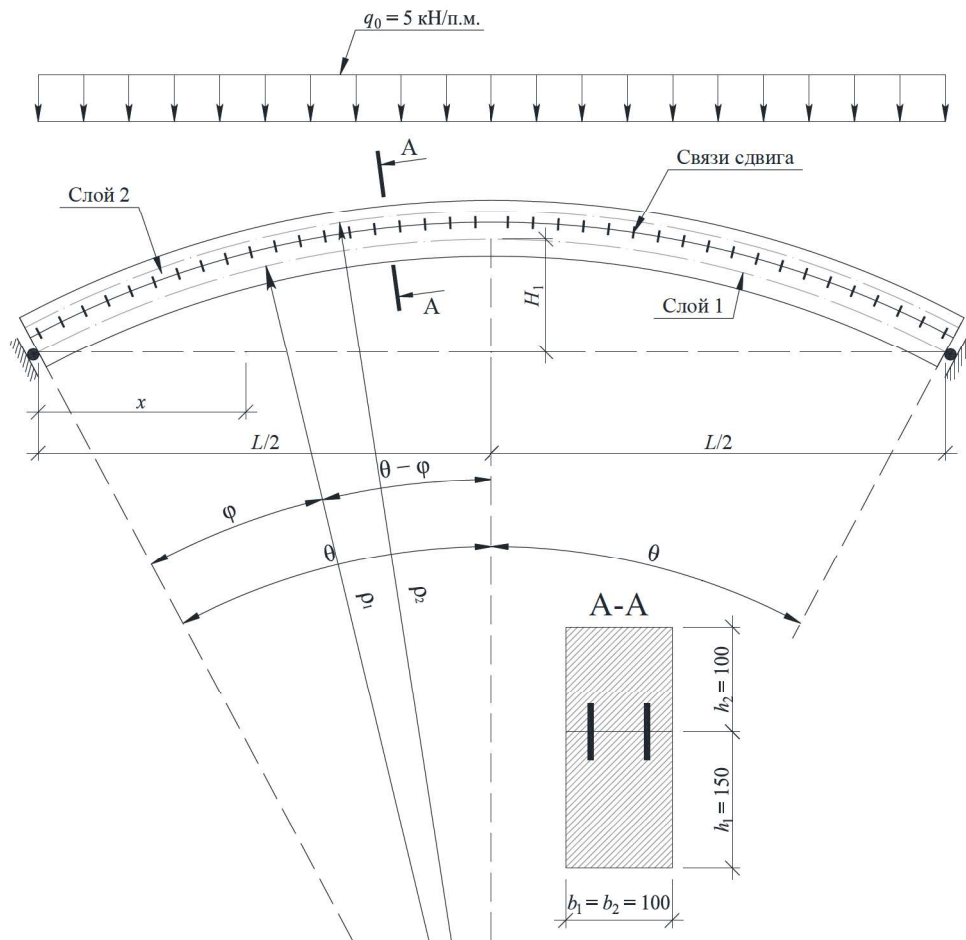


Рис. 3. К примеру расчета — двухслойный криволинейный элемент с упругоподатливыми связями сдвига

Грузовой член уравнения и коэффициент при неизвестном, определяемые по формулам (8), будут иметь вид:

$$\Delta_{10}(\varphi) = \frac{N_1^0}{F_1 \cdot E} - \frac{N_2^0}{F_2 \cdot E} - \left(\frac{M_1^0 \cdot b_1}{I_1 \cdot E} + \frac{M_2^0 \cdot a_2}{I_2 \cdot E} \right); \quad (15)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{F_1 \cdot E} + \frac{1}{F_2 \cdot E} + \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \left(\frac{\alpha_{1,M} \cdot b_1}{I_1 \cdot E} + \frac{\alpha_{2,M} \cdot a_2}{I_2 \cdot E} \right). \quad (16)$$

Решение уравнения (14) может быть представлено в виде [21]:

$$T(\varphi) = C_1 \cdot sh(\lambda \cdot \varphi) + C_2 \cdot ch(\lambda \cdot \varphi) + \frac{R^2 \xi}{\lambda} \int_0^\varphi \Delta_{10}(\bar{\varphi}) \cdot sh(\lambda [\varphi - \bar{\varphi}]) d\bar{\varphi}, \quad (17)$$

где C_1, C_2 — константы интегрирования, определяемые из граничных условий; λ — величина, определяемая выражением

$$\lambda = R \sqrt{\xi \cdot \delta_{11}}. \quad (18)$$

При отсутствии противосдвигающих упоров (рис. 4, а) по концам криволинейного составного стержня сдвигающие усилия $T(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$, а константа C_1 определяется из уравнения: $T(2\theta) = a_1 C_1 + b_1 = 0$, где a_1, b_1 — числовые коэффициенты, получаемые подстановкой заданных числовых значений в выражения (15)–(18).

При наличии на концах стержня противосдвигающих упоров (рис. 4, б) будут равны нулю взаимные сдвиги торцевых сечений составляющих слоев, т. е. будет иметь место равенство $T'(0) = T'(2\theta) = 0$, следовательно, $C_1 = 0$, а константа C_2 будет определяться из уравнения

$$T'(2\theta) = \lambda \cdot C_2 \cdot sh(\lambda \cdot 2\theta) + R^2 \xi \int_0^{2\theta} \Delta_{10}(\bar{\varphi}) \cdot ch(\lambda [2\theta - \bar{\varphi}]) d\bar{\varphi} = 0, \quad (19)$$

которое с учетом подстановки заданных числовых значений будет иметь вид, аналогичный предыдущему случаю: $T'(2\theta) = a_2 C_2 + b_2 = 0$.

Определение произвольных постоянных раскрывает внутреннюю статическую неопределимость системы и дает возможность вычислять нормальные и касательные напряжения в любых сечениях слоев по длине криволинейного стержня.

В случае, когда обе опоры стержня не смещаемы по горизонтали (рис. 4, б, в), система является один раз внешне статически неопределимой, что требует определить усилие распора. Решение задачи в данном случае может быть выполнено по следующему алгоритму (решение рассмотрено на примере метода сил). Каноническое уравнение будет иметь вид

$$\delta_F \cdot X + \Delta_F = c_{оп} \cdot X, \quad (20)$$

где X — искомое усилие распора или усилие в затяжке; δ_F — перемещение, вызванное единичной силой $\bar{F} = 1$ в опоре с отбрасываемой связью по направлению этой связи; Δ_F — то же, вызванное внешней нагрузкой (грузовой коэффициент); $c_{оп}$ — горизонтальная жесткость отбрасываемой связи при абсолютно жестких опорах $c_{оп} X = 0$.

Коэффициент при неизвестной δ_F и грузовой член Δ_F определяются с учетом усилий в связях сдвига, т. е. в системе с раскрытой внутренней статической неопределимостью (рис. 5).

Функция, описывающая высоту подъема оси слоя $i = 1$:

$$H(\varphi) = H_1 - [\rho_1 - \rho_1 \cdot \cos(\theta - \varphi)]. \quad (21)$$

Силовые факторы в основной системе от действия единичной силы $\bar{F} = 1$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \overline{M}_i^0(\varphi) &= -\alpha_{i,M} H(\varphi); \\ \overline{N}_i^0(\varphi) &= -\alpha_{i,N} \cos(\theta - \varphi); \\ \overline{Q}_i^0(\varphi) &= -\alpha_{i,M} \sin(\theta - \varphi). \end{aligned} \quad (22)$$

Для криволинейного стержня из двух слоев коэффициент и свободный член уравнения (20) будут:

$$\delta_F = \sum_{i=1,2} \int_0^{2\theta} \frac{\overline{M}_i^0(\varphi)^2}{E_i \cdot I_i} d\varphi + \int_0^{2\theta} \frac{\overline{N}_i^0(\varphi)^2}{E_i \cdot F_i} d\varphi +$$

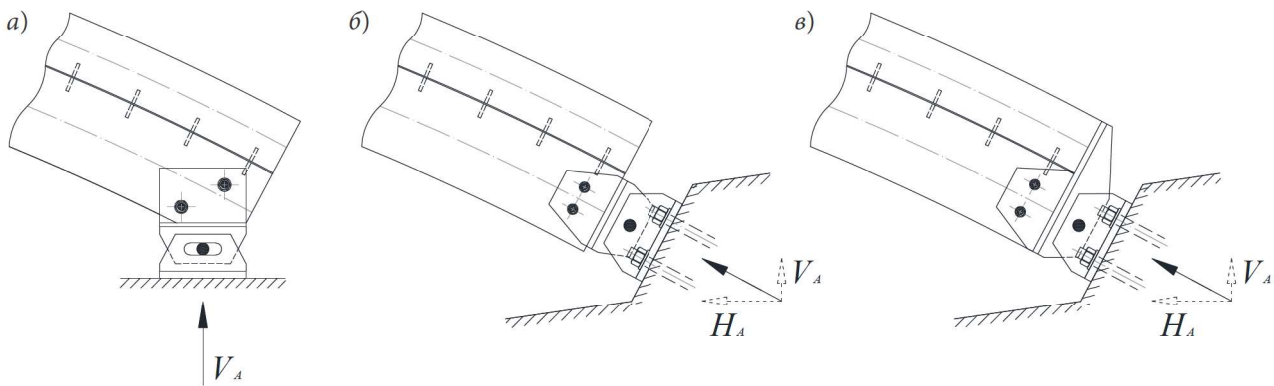


Рис. 4. Варианты концевых закреплений криволинейного составного стержня с шарнирными опорами: а — скользящая опора без противосдвиговых упоров; б — неподвижная опора без противосдвиговых упоров; в — неподвижная опора с противосдвиговым упором на торцах составляющих слоев

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{2\theta} k_i \frac{\overline{Q}_i(\varphi)^2}{G_i \cdot F_i} d\varphi; \\
 \Delta F = & \sum_{i=1,2} \int_0^{2\theta} \frac{M_i(\varphi) \cdot \overline{M}_i(\varphi)}{E_i \cdot I_i} d\varphi + \\
 & + \sum_{i=1,2} \int_0^{2\theta} \frac{N_i(\varphi) \cdot \overline{N}_i(\varphi)}{E_i \cdot F_i} d\varphi + \\
 & + \sum_{i=1,2} \int_0^{2\theta} k_i \frac{Q_i(\varphi) \cdot \overline{Q}_i(\varphi)}{G_i \cdot F_i} d\varphi,
 \end{aligned} \quad (23)$$

где G_i — модуль сдвига; k_i — коэффициент, учитывающий влияние формы сечения на неравномерность распределения касательных напряжений ($k_1 = k_2 = 1,2$ для прямоугольных сечений [22]); $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{Q}_i$ — функции распределения силовых факторов в i -м стержне от единичной силы, определенные с учетом усилий в связях сдвига:

$$\overline{N}_i(\varphi) = \overline{N}_i^0(\varphi) - \alpha_{i,M} \cdot \overline{T}(\varphi) \cdot c_1; \quad (25)$$

$$\overline{N}_i(\varphi) = \overline{N}_i^0(\varphi) + \int_0^{\varphi} \tau(\bar{\varphi}) \cdot \cos(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}; \quad (26)$$

$$\overline{Q}_i(\varphi) = \overline{Q}_i^0(\varphi) - \int_0^{\varphi} \tau(\bar{\varphi}) \cdot \sin(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}. \quad (27)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 1, 2 и на рис. 6, 7.

Для стержней без сдвиговых упоров на торцах при отсутствии сил распора с относительным радиусом кривизны $\rho/L > 0,75$ сдвигающие усилия в связях практически не зависят от кривизны (увеличение

$T(\theta) < 5\%$). Усилие сдвига в таких стержнях может определяться по правилам расчета прямолинейных составных стержней, т. е. по классической теории А. Р. Ржаницына. При относительном радиусе кривизны $\rho/L < 0,75$ изменение усилий в связях сдвига в середине пролета стержня $T(\theta)$ составляет 5...17 %, определение усилий в связях сдвига должно производиться как для криволинейного составного стержня. Для стержней без сдвиговых упоров на торцах при наличии сил распора сдвигающие усилия в связях значительно изменяются на всем диапазоне варьирования ρ/L (на 30...90 %). Таким образом, для этих стержней при любом значении ρ/L расчет должен производиться как для криволинейного составного стержня. Сделанные выводы, касающиеся определения усилий в связях сдвига справедливы и при наличии сдвиговых упоров на торцах составного стержня, однако при отсутствии сил распора усилия в связях практически не зависят от соотношения ρ/L при любых его значениях.

Усилие распора H_A существенно зависит от всех рассмотренных факторов: погонной жесткости связей сдвига ξ , относительной кривизны ρ/L и наличия сдвиговых упоров на торцах. При увеличении ξ усилие распора H_A снижается, в пологих стержнях с $\rho/L > 2,5$ это снижение более значительно и составляет 20...60 % при отсутствии сдви-

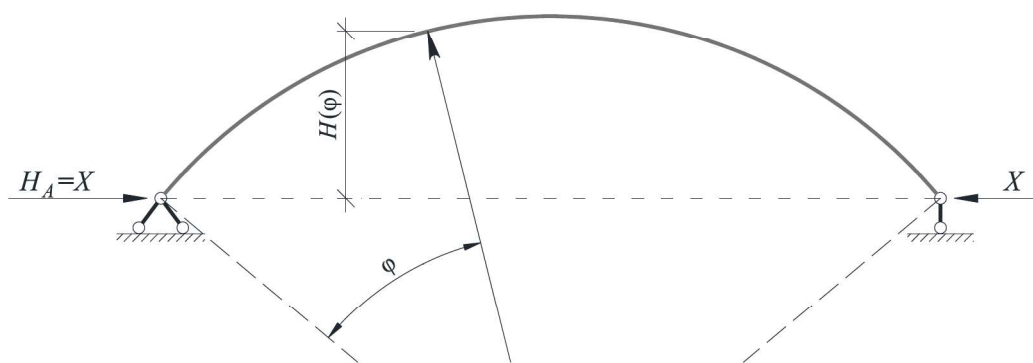


Рис. 5. Основная система метода сил для определения горизонтальной реакции распора

говых упоров на торцах и 13...50 % — при их наличии. Для стержней с $\rho/L \leq 2,5$ независимо от наличия сдвиговых упоров изменение силы распора H_A не превышает 5 %, для таких составных стержней распор может определяться как для сплошного стержня.

В криволинейных стержнях с $\rho/L > 2,5$ значение сил распора H_A существенно зависит от наличия сдвиговых упоров на торцах — при одинаковых статико-геометрических параметрах и равных значениях жесткости связей сдвига ξ в стержне со сдвиговыми

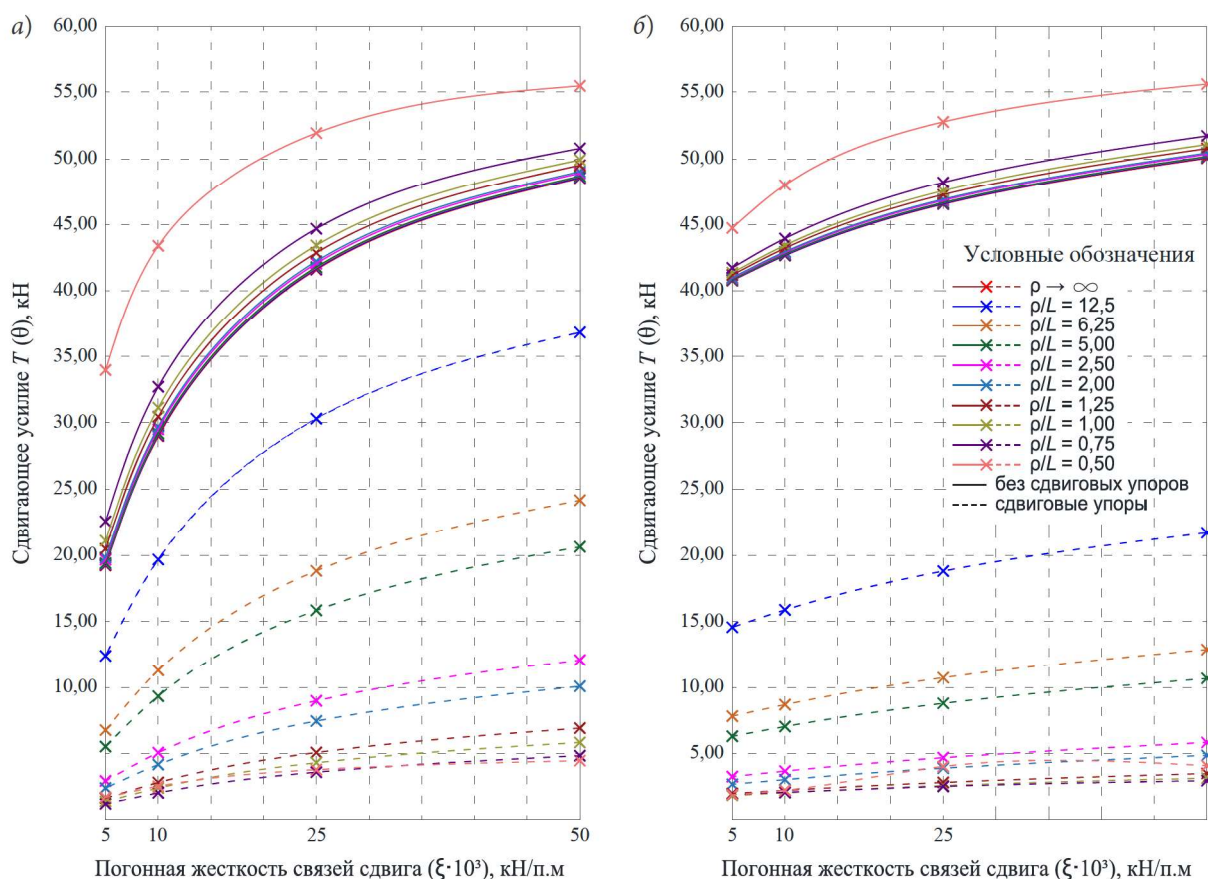


Рис. 6. Графики зависимости сдвигающей силы $T(\theta)$ в середине пролета криволинейного стержня от погонной жесткости связей сдвига ξ при различных значениях относительного радиуса кривизны (ρ/L): а — при отсутствии горизонтальной реакции (распора); б — при наличии распора

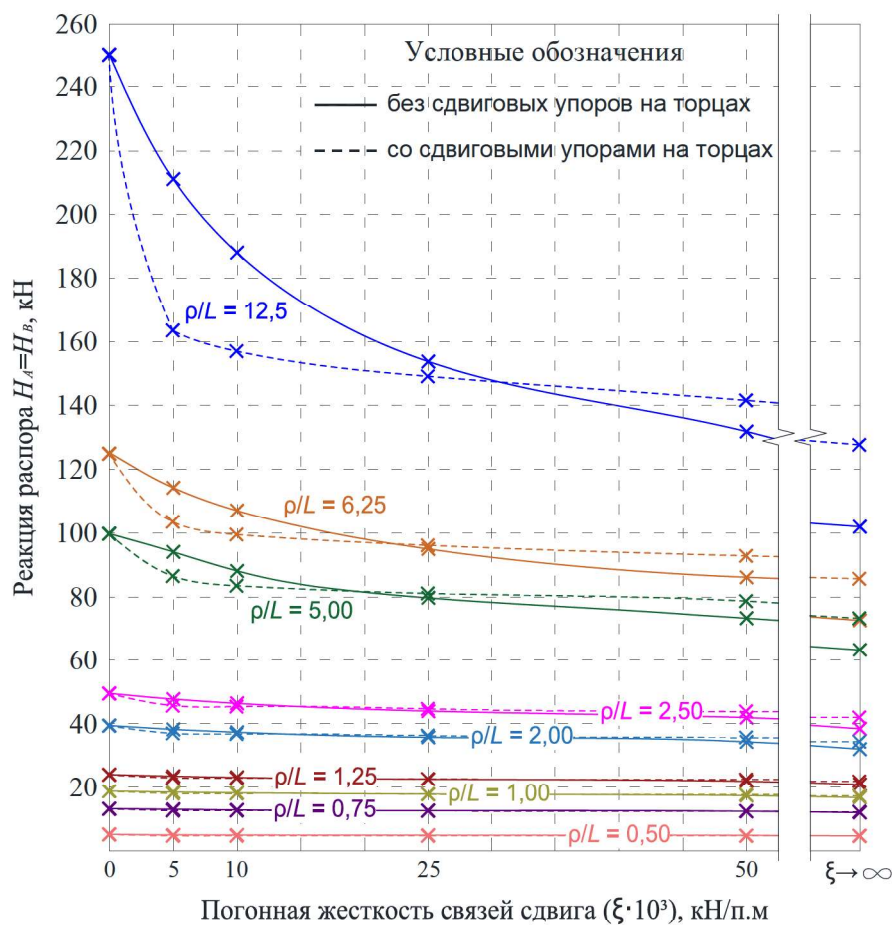


Рис. 7. Графики зависимости реакции распора H_A на опорах от погонной жесткости связей сдвига ξ при различных значениях относительного радиуса кривизны (ρ/L)

упорами уменьшение распора H_A составляет 5...25 %.

Выводы

1. В развитие классической теории расчета прямолинейных составных стержней А. Р. Ржаницына предложен математический аппарат, позволяющий производить расчет составных стержней с криволинейной осью, упругоподатливыми связями сдвига в предположении абсолютной жесткости поперечных связей.

2. Усилия в связях сдвига в криволинейных стержнях $\rho/L > 0,75$ при отсутствии сил распора могут определяться как для прямолинейного стержня.

3. Погонная жесткость связей сдвига ξ существенно влияет на значение сил распора

H_A в пологих составных стержнях, для которых $\rho/L > 2,5$. В составных стержнях при $\rho/L \leq 2,5$ определение сил распора может производиться как для сплошного стержня.

Библиографический список

1. Чернова Т. П. Совершенствование конструкции и технологии сопряжения CLT-панелей с деревоклееными элементами: дис. ... канд. техн. наук. Архангельск, 2018. 122 с.
2. Ратнер В. И. ДЕРЕВОБЕТОННОЕ ПЕРЕКРЫТИЕ // Строительная промышленность. 1930. № 5. С. 408–411.
3. Ржаницын А. Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1948. 192 с.
4. Плешков П. Ф. Теория расчета деревянных составных стержней. Л.: Стройиздат, 1952. 195 с.
5. Якубовский Ю. Е., Колосов В. И., Фокин А. А. Нелинейный изгиб составной пластины // Известия

Таблица 1

Результаты расчета при отсутствии сдвиговых упоров ($T(0) = T(2\theta) = 0$)

$\rho, \text{ м}$ (ρ/L)	$\theta, \text{ град}$	Погонный коэффициент жесткости связей сдвига, $\xi, \text{ кН/(п. м)}$											
		$\xi \rightarrow 0$			5000			10 000			25 000		
		$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$
$\rho = \infty$	–	–	19,24	–	–	–	28,99	–	–	–	41,60	–	–
50 (12,5)	2,2924	249,9	19,3	211,03	12,4	29,06	187,98	19,69	41,66	153,74	30,3	48,59	36,81
25 (6,25)	4,5884	124,82	19,37	114,24	6,76	29,15	107,09	11,28	41,74	94,98	18,83	48,66	24,16
20 (5)	5,7391	99,76	19,41	92,86	5,52	29,2	88,06	9,32	41,79	79,68	15,85	48,69	20,65
10 (2,5)	11,5371	49,52	19,67	47,7	2,93	29,5	46,37	5,06	42,06	43,88	8,97	48,91	12,08
8 (2)	14,4775	39,4	19,84	38,21	2,4	29,69	37,33	4,16	42,23	35,68	7,44	49,03	10,07
5 (1,25)	23,5777	24,01	20,5	23,52	1,62	30,45	23,16	2,81	42,87	22,46	5,07	49,51	6,91
4 (1)	30	18,72	21,12	18,4	1,38	31,13	18,16	2,39	43,43	17,7	4,3	49,91	5,83
3 (0,75)	41,81	13,18	22,57	12,98	1,18	32,71	12,84	2,03	44,69	12,57	3,59	50,78	4,83
2 (0,5)	90	5,16	33,97	5,04	1,68	43,4	4,98	2,53	51,93	4,88	3,78	55,46	4,46
													4,74

Таблица 2

Результаты расчета при наличии сдвиговых упоров ($T'(0) = T'(2\theta) = 0$)

$\rho, \text{ м}$ (ρ/L)	$\theta, \text{ град}$	Погонный коэффициент жесткости связей сдвига, $\xi, \text{ кН/(п. м)}$											
		$\xi \rightarrow 0$			5000			10 000			25 000		
		$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$	$H_A, \text{ кН}$	$T(\theta), \text{ кН}$
$\rho = \infty$	–	–	40,77	–	–	–	42,66	–	–	–	46,54	–	–
50 (12,5)	2,2924	249,9	40,8	160,76	14,57	42,69	157,03	15,88	46,58	149,08	18,81	50,09	21,72
25 (6,25)	4,5884	124,82	40,83	101,06	7,81	42,74	99,58	8,68	46,64	96,24	10,72	50,14	12,88
20 (5)	5,7391	99,76	40,85	84,52	6,29	42,76	83,49	7,03	46,66	81,12	8,78	50,17	10,66
10 (2,5)	11,5371	49,52	40,95	45,72	3,26	42,88	45,42	3,67	46,82	44,69	4,68	50,33	5,83
8 (2)	14,4775	39,4	41	36,96	2,68	42,95	36,75	3,03	46,91	36,26	3,89	50,43	4,86
5 (1,25)	23,5777	24,01	41,2	23	1,98	43,22	22,91	2,22	47,26	22,7	2,82	50,77	3,49
4 (1)	30	18,72	41,37	18,04	1,83	43,44	17,98	2,04	47,55	17,83	2,58	51,07	3,14
3 (0,75)	41,81	13,18	41,73	12,72	1,91	43,95	12,69	2,07	48,21	12,6	2,52	51,71	2,95
2 (0,5)	90	5,16	44,74	4,83	3,89	48,01	4,83	3,92	52,76	4,82	4,02	55,59	4,08
													4,78

тия вузов. Строительство и архитектура. 1990. № 7. С. 25–27.

6. Якубовская С. В., Гуляев Б. А. Расчет составных пластин и пологих оболочек с учетом ортотропии жесткости межслойных связей // Известия вузов. Нефть и газ. 1999. № 2. С. 82–88.

7. Якубовский Ю. Е., Коновалова О. Н. Моделирование изгиба составных пластин при различных краевых условиях // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: 4-я Междунар. конф. Санкт-Петербург, 29–30 июня 1999 г. СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения Императора Александра I, 1999. С. 140–141.

8. Якубовский Ю. Е., Кривчун Н. А., Бабшанов М. Т. Математическая модель изгиба составных пластин из разномодульных материалов // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: 4-я Междунар. конф. Санкт-Петербург, 29–30 июня 1999 г. СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения Императора Александра I, 1999. С. 141–142.

9. Якубовский Ю. Е., Кривчун Н. А., Бабшанов М. Т. Моделирование изгиба составных пластин из разносопротивляющихся материалов // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: 4-я Междунар. конф. Санкт-Петербург, 29–30 июня 1999 г. СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения Императора Александра I, 1999. С. 207–211.

10. Якубовский Ю. Е., Кривчун Н. А., Бабшанов М. Т. Изгиб составной пластины из разномодульных материалов // Известия вузов. Нефть и газ. 1999. № 3. С. 78–86.

11. Буланова О. Д. Изгиб составных конструктивно ортотропных пластин с учетом физически нелинейных свойств материала // Проблемы прочности материалов и конструкций на транспорте: 3-я Междунар. конф. Санкт-Петербург, 25–26 января 1995 г. СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения Императора Александра I, 1995. С. 79–80.

12. Леоненко Д. В. Колебания трехслойных стержней и пластин при локальных воздействиях: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гомель, 2004. 20 с.

13. Филатов В. В. Развитие теории и разработка численной методики расчета составных стержней и пластин: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2014. 292 с.

14. Габбасов Р. Ф., Филатов В. В. Численный метод расчета составных стержней и пластин с абсолютно жесткими поперечными связями. М.: АСВ, 2014. 200 с.

15. Линьков В. И. К оценке деформативности соединений деревянных элементов на наклонных металлических стержнях без применения клея // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 3 (272). С. 11–14.

16. Карельский А. В., Журавлева Т. П., Лабудин Б. В. Испытание на изгиб деревянных составных балок, соединенных металлическими зубчатыми пластинами, разрушающей нагрузкой // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 2 (54). С. 77–85.

17. Chernova T. P., Melekhov V. I. Behavior of timber-timber composite structure connected by inclined screws // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 120 (4). 12004. DOI 10.34910/MCE.120.4.

18. Vladimirova O. A., Sopilov V. V., Bobyleva A. V., Labudin B. V., Popov E. V. Wood-composite structures with non-linear behavior of semi-rigid shear ties // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. Vol. 4 (97). 9702. DOI 10.4123/CUBS.97.2.

19. Popov E. V., Labudin B. V., Kononov A. Yu., Karelskiy A. V., Sopilov V. V., Bobyleva A. V., Stolybin D. A. Numerical buckling calculation method for composite rods with semi-rigid ties // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 119 (3). 11904. DOI 10.34910/MCE.119.4.

20. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Наука, 1965. 364 с.

21. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.

22. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 2. М.: Наука, 1978. 616 с.

References

1. Chernova T. P. *Sovershenstvovanie konstruktivnoy i tekhnologii sopryazheniya CLT-paneley s derevokleenyimi elementami*. Diss. kand. tekhn. nauk [Improving the design and technology of interfacing CLT panels with wood-glued elements. PhD in Sci. Tech. diss.]. Arkhangel'sk, 2018, 122 p.

2. Ratner V. I. *Derevobetonnoe perekrytie* [Wood concrete floor]. *Stroitel'naya promyshlennost' – Construction Industry*, 1930, no. 5, pp. 408–411.

3. Rzhantsyn A. R. *Teoriya sostavnykh sterzhney stroitel'nykh konstruktsey* [Theory of composite rods of building structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1948, 192 p.

4. Pleshkov P. F. *Teoriya rascheta derevyannykh sostavnykh sterzhney* [Theory of calculation of wooden composite rods]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1952, 195 p.

5. Yakubovskiy Yu. E., Kolosov V. I., Fokin A. A. *Nelineyniy izgib sostavnoy plastiny* [Nonlinear bending of the composite plate]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura – Bulletin of Universities. Construction and Architecture*, 1990, no. 7, pp. 25–27.

6. Yakubovskaya C. B., Gulyaev B. A. *Raschet sostavnykh plastin i pologikh obolochek s uchetom ortotropii zhestkosti mezhslownykh svyazey* [Calculation of composite plates and shallow shells taking into account the orthotropy of

the stiffness of interlayer bonds]. *Izv. vuzov. Neft' i gaz – Bulletin of Universities. Oil and Gas*, 1999, no. 2, pp. 82–88.

7. Yakubovskiy Yu. E., Konovalova O. N. *Modelirovanie izgiba sostavnykh plastin pri razlichnykh kraevykh usloviyakh* [Modeling the bending of composite plates under various boundary conditions]. *Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte. Trudy 4-oy Mezhdunar. konf. Sankt-Peterburg, 29–30 iyunya 1999 g.* [Problems of strength of materials and structures in transport. Proceedings of the 4-th International. conf., St. Petersburg, June 29–30, 1999]. St. Petersburg, Peterburgskiy gos. un-t putey soobshcheniya Imperatora Aleksandra I Publ., 1999, pp. 140–141.

8. Yakubovskiy Yu. E., Krivchun H. A., Babshanov M. T. *Matematicheskaya model' izgiba sostavnykh plastin iz raznomodul'nykh materialov* [Mathematical model of bending of composite plates from different-module materials]. *Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte. Trudy 4-oy Mezhdunar. konf. Sankt-Peterburg, 29–30 iyunya 1999 g.* [Problems of strength of materials and structures in transport. Proceedings of the 4-th International. conf., St. Petersburg, June 29–30, 1999]. St. Petersburg, Peterburgskiy gos. un-t putey soobshcheniya Imperatora Aleksandra I Publ., 1999, pp. 141–142.

9. Yakubovskiy Yu. E., Krivchun H. A., Babshanov M. T. *Modelirovanie izgiba sostavnykh plastin iz raznosoprotivlyayushchikhsya materialov* [Modeling the bending of composite plates from different resisting materials]. *Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte. Trudy 4-oy Mezhdunar. konf. Sankt-Peterburg, 29–30 iyunya 1999 g.* [Problems of strength of materials and structures in transport. Proceedings of the 4-th International. conf., St. Petersburg, June 29–30, 1999]. St. Petersburg, Peterburgskiy gos. un-t putey soobshcheniya Imperatora Aleksandra I Publ., 1999, pp. 207–211.

10. Yakubovskiy Yu. E., Krivchun H. A., Babshanov M. T. *Izgib sostavnoy plastiny iz raznomodul'nykh materialov* [Bending of a composite plate made of different-module materials]. *Izv. vuzov. Neft' i gaz – Bulletin of Universities. Oil and gas*, 1999, no. 3, pp. 78–86.

11. Bulanova O. D. *Izgib sostavnykh konstruktivno ortotropnykh plastin s uchetom fizicheski nelineynykh svoystv materiala* [Bending of composite structurally orthotropic plates taking into account physically nonlinear material properties]. *Problemy prochnosti materialov i konstruksiy na transporte. Trudy 3-ey Mezhdunar. konf. Sankt-Peterburg, 25–26 yanvarya 1995 g.* [Problems of strength of materials and structures in transport. Proceedings of the 3rd International. conf., St. Petersburg, January 25–26, 1995]. St. Petersburg, Peterburgskiy gos. un-t putey soobshcheniya Imperatora Aleksandra I Publ., 1995, pp. 79–80.

12. Leonenko D. V. *Kolebaniya trekhslonnykh sterzhney i plastin pri lokal'nykh vozdeystviyakh. Avtoref. diss. kand. fiz.-mat. nauk* [Vibrations of three-layer rods and plates under local influences. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Gomel', 2004, 20 p.

13. Filatov V. V. *Razvitie teorii i razrabotka chislennoy metodiki rascheta sostavnykh sterzhney i plastin. Diss. dokt. tekhn. nauk* [Development of the theory and development of a numerical methodology for calculating composite rods and plates. Dr. Sci. Tech. diss.]. Moscow, 2014, 292 p.

14. Gabbasov R. F., Filatov V. V. *Chislenniy metod rascheta sostavnykh sterzhney i plastin s absolyutno zhestkimi poperechnymi svyaziyami* [Numerical method for calculating composite rods and plates with absolutely rigid transverse ties]. Moscow, ASV Publ., 2014, 200 p.

15. Lin'kov V. I. *K otsenke deformativnosti soedineniy derevyannykh elementov na naklonnykh metallicheskiykh sterzhnyakh bez primeneniya kleya* [Assessment of deformability of connections of wooden elements on inclined metal rods without glue]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Construction mechanics and calculation of structures*, 2017, no. 3 (272), pp. 11–14.

16. Karel'skiy A. V., Zhuravleva T. P., Labudin B. V. *Ispytanie na izgib derevyannykh sostavnykh balok, soedinennykh metallicheskiy zubchatymi platinami, razrushayushchey nagruzkoy* [Bending test of wooden composite beams connected with metal gear plates by destructive load]. *Inzhenerno-stroitel'niy zhurnal – Engineering and Construction Journal*, 2015, no. 2 (54), pp. 77–85.

17. Chernova T. P., Melekhov V. I. Behavior of timber-timber composite structure connected by inclined screws. *Magazine of Civil Engineering*, 2023, vol. 120 (4), 12004. DOI 10.34910/MCE.120.4.

18. Vladimirova O. A., Sopilov V. V., Bobyleva A. V., Labudin B. V., Popov E. V. Wood-composite structures with non-linear behavior of semi-rigid shear ties. *Construction of Unique Buildings and Structures*, 2021, vol. 4 (97), 9702. DOI 10.4123/CUBS.97.2.

19. Popov E. V., Labudin B. V., Konovalov A. Yu., Karelskiy A. V., Sopilov V. V., Bobyleva A. V., Stolypin D. A. Numerical buckling calculation method for composite rods with semi-rigid ties. *Magazine of Civil Engineering*, 2023, vol. 119 (3), 11904. DOI 10.34910/MCE.119.4.

20. Timoshenko S. P. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Vol. 1. Moscow, Nauka Publ., 1965, 364 p.

21. Rzhantsyn A. R. *Sostavnye sterzhni i plastinki* [Composite rods and plates]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1986, 316 p.

22. Filin A. P. *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela* [Applied mechanics of a solid deformable body]. Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1978, 616 p.