УДК 624.04/.07, 004.942
DOI 10.23968/1999-5571-2026-23-4-35-46

© *А. И. Гарипов*, аспирант
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
*E-mail: azat.i.garipov@gmail.com*

© *A. I. Garipov*, post-graduate student
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
*E-mail: azat.i.garipov@gmail.com*

# УТОЧНЕНИЕ ТАБЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТО-ИЗГИБАЕМЫХ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

# REFINEMENT OF TABLE VALUES OF BUCKLING RESISTANCE FACTORS FOR STEEL BARS UNDER COMPRESSION AND BENDING

Нормативные таблицы коэффициентов устойчивости элементов стальных конструкций при внецентренном сжатии имеют неточности и не пересчитывались больше 50 лет. Коэффициент использования прочности с учетом упругопластической работы при внецентренном сжатии в некоторых случаях оказывается больше коэффициента использования устойчивости. Для уточнения таблицы коэффициентов устойчивости выполнены расчеты тремя различными методами: 1) прямым методом по приращению нагрузки с учетом неравномерного распределения пластических деформаций по длине стержня в предположении малости деформаций с использованием алгоритма, предложенного в настоящей работе; 2) обратным методом в предположении равномерного распределения пластических деформаций по длине стержня; 3) методом конечных элементов (МКЭ) с использованием стержневой модели, учитывающей неравномерное распределение пластических деформаций по длине стержня и большие деформации. Результаты расчетов прямым методом и МКЭ хорошо согласуются. Обратный метод расчета обеспечивает консервативную оценку устойчивости с приемлемой для инженерных расчетов точностью, при этом на порядок быстрее. Представленные в работе результаты расчета коэффициента устойчивости могут быть напрямую перенесены в табл. Д.3 норм при их обновлении.

*Ключевые слова*: устойчивость, гибкость, эксцентриситет, сжатие, изгиб, стальной стержень, метод конечных элементов, пластические деформации.

Standard tables of stability factors for steel structure elements under eccentric compression include some inaccuracies and have not been recalculated for over 50 years. Strength utilization factor, taking into account the elastic-plastic resistance under eccentric compression, in some cases turns out to be greater than the stability utilization factor. To refine the table of stability factors, calculations were performed using three different methods: 1) the forward method based on load increments, taking into account a non-uniform plastic strains distribution along the length of the bar, assuming small deformations, using the algorithm proposed in this paper; 2) the backward method assuming uniform plastic strain distribution along the length of the bar; 3) the finite element method using a bar model that takes into account a non-uniform plastic strains distribution along the length of the bar and large deformations. The results of calculations, obtained by the forward method and by the finite elements method, are in excellent agreement. The backward calculation method provides a conservative assessment of stability with accuracy acceptable for engineering calculations, while being an order of magnitude faster. The results of calculating the stability factors presented in the paper can be directly transferred to Table «Д.3» of the standards when they are updated.

*Keywords*: buckling resistance, flexibility, eccentricity, compression, bending, steel bar, finite element method, plastic strains.

## Введение

Табличные значения коэффициента устойчивости при внецентренном сжатии используются с момента введения в действие строительных норм и правил СНиП II-В.3–62[1]. Они зависели от гибкости стержня $\lambda = L/i$ (где $L$ — длина, $i = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции) и относились к сталям с расчет-

[1] СНиП II-В.3–62. Строительные нормы и правила. Ч. II, раздел В. Глава 3. Стальные конструкции. Нормы проектирования. М.: Госстройиздат, 1963.

ным сопротивлением $R_y = 2100$ кг/см$^2$, при этом элементы из других сталей рассчитывались по условной гибкости $\lambda\sqrt{R_y/2100}$ (где $R_y$ выражено в кг/см$^2$). В СНиП II-В.3–72[2] таблица была существенно переработана: значения коэффициента представлены в зависимости от условной гибкости $\overline{\lambda} = \lambda\sqrt{R_y/E}$ в диапазоне от 0,5 до 14. Практически без изменений та же таблица была представлена в СНиП II-23–81*[3] и СП 16.13330.2011[4], а также в несколько усеченном виде в действующих нормах[5].

Анализируя табличные значения, можно заметить некоторые неточности. Так, коэффициент использования прочности по формуле (105) норм больше коэффициентов использования устойчивости по формуле (109) норм для «эталонного» прямоугольного сечения. Кроме того, очевидно, что при разработке СНиП коэффициенты были рассчитаны не для каждого сочетания параметров $\overline{\lambda}$ и $m$, представленного в таблице, так как часть значений линейно интерполирована по соседним. Ю. В. Соболев отмечал в работе [1], что нормативные значения коэффициентов устойчивости несколько завышены при малых гибкостях, что связано с использованием в расчете упрощенной формулы прогиба, а также касательного модуля деформации $E_{\text{пл}} = 0,01E$ на площадке текучести.

Выполним расчеты коэффициентов устойчивости, используя прямой и обратный методы, а также метод конечных элементов.

**Методы**

*Общие положения*

Используем для расчета модель шарнирного стержня длиной $L$, загруженного в общем случае продольной силой $N$, сосредоточенными моментами в начале $M_s$ и на конце $M_e$, а также распределенной поперечной силой $q = f(z)$. При расчете коэффициентов устойчивости для нормативной таблицы будем использовать $q = 0$, $M_s = M_e = \rho mN$ (где $\rho = W/A$ — ядровое расстояние). Для учета физической нелинейности будем использовать метод упругих решений [16], компенсируя развитие пластических деформаций фиктивным догружением. Если в сечении стержня из упругопластического материала при деформациях $\varepsilon = f(y)$ действует изгибающий момент $M = \oint\limits_A \sigma y\, dA$ (где $\sigma = f(\varepsilon)$ — диаграмма работы стали), то в сечении стержня из упругого материала при тех же деформациях действует эквивалентный изгибающий момент $M^* = E\oint\limits_A \varepsilon y\, dA$ (где $E$ — модуль упругости), разницу между которыми составляет фиктивный момент $M_f = \oint\limits_A (E\varepsilon - \sigma) y\, dA = M^* - M$ (рис. 1, *ж*).

Дифференциальное уравнение устойчивости с учетом действия реального и фиктивного изгибающих моментов запишем в виде

$$EI_x v'' + Nv + M_0^* = 0, \qquad (1)$$

где $M_0^* = M_0 + M_f$ — эквивалентный изгибающий момент из расчета по недеформированной схеме; $M_0 = f(M_s, M_e, q)$ — изгибающий момент от внешней нагрузки; $v = f(z)$ — функция прогиба стержня.

Во всех случаях будем использовать унифицированную диаграмму работы сталей $\overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon})$, координаты точек которой на нелинейном участке сведены в табл. 1 (при деформациях $\overline{\varepsilon} > 1,7$ — площадка текучести, рис. 1, *и*).

Деформированное состояние в поперечном сечении будем рассчитывать по одной из двух формул:

$$\overline{\varepsilon}(\overline{y}) = \overline{\varepsilon}_{\max}\left(k_N + (1 - k_N)\cdot\overline{y}\right), \qquad (2)$$

$$\overline{\varepsilon}(\overline{y}) = \overline{N}^* + \overline{M}^*\cdot\overline{y}, \qquad (3)$$

[2] СНиП II-В.3–72. Строительные нормы и правила. Ч. II, раздел В. Глава 3. Стальные конструкции. Нормы проектирования. М.: Стройиздат, 1974.

[3] СНиП II-23–81*. Строительные нормы и правила. Ч. II. Нормы проектирования. Глава 23. Стальные конструкции. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990.

[4] СП 16.13330.2011. Свод правил. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23–81*. М.: Минрегион России, 2010.

[5] СП 16.13330.2017. Свод правил. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23–81*. М.: Стандартинформ, 2017.

*Таблица 1*

**Точки унифицированной диаграммы работы сталей**

| $\bar{\varepsilon} = \varepsilon E / R_y$ | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\sigma} = \sigma / R_y$ | 0,800 | 0,860 | 0,905 | 0,941 | 0,964 | 0,981 | 0,991 | 0,997 | 0,999 | 1,000 |

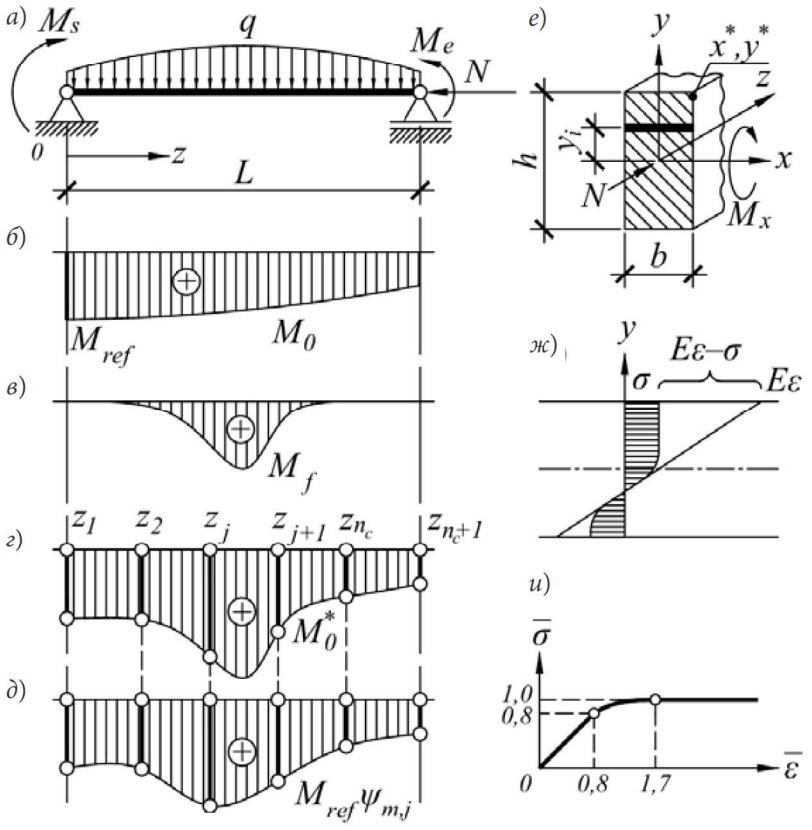



Рис. 1. Общий вид расчетной схемы: *а* — закрепление и загружение; *б* — эпюра момента от нагрузки; *в* — эпюра фиктивного момента; *г* — эпюра эквивалентного момента; *д* — аппроксимация эпюры эквивалентного момента сплайном; *е* — поперечное сечение; *ж* — эпюра напряжений по высоте сечения; *и* — унифицированная диаграмма работы сталей

где $\bar{\varepsilon}_{\max}$ — деформация наиболее напряженной точки сечения; $k_N \in [0;1]$ — параметр распределения деформаций; $\bar{y} = y / y^*$ — относительная координата слоя сечения; $y^* = h/2$ — координата наиболее нагруженной точки сечения.

Поперечное сечение по высоте разбиваем на $n_f$ слоев (волокон) равной толщины. Усилия в сечении при известном распределении деформаций определяем в безразмерном виде:

$$\bar{N} = \frac{N}{AR_y} = \bar{A}_f \sum_{i=1}^{n_f} \bar{\sigma}_i, \qquad (4)$$

$$\bar{M} = \frac{M}{WR_y} = \bar{A}_f \sum_{i=1}^{n_f} \left( \bar{\sigma}_i \cdot \hat{y}_i \right), \qquad (5)$$

где $\bar{A}_f = A_f / A = 1/n_f$ — относительная площадь одного слоя поперечного сечения; $\hat{y}_i = y_i / \rho = 3 \cdot \bar{y}_i$ — координаты слоев, отнесенные к ядровому расстоянию; $\bar{y}_i = 2y_i / h = 1 - 2(i - 0{,}5)/n_f$ — координаты слоев, отнесенные к координате наиболее нагруженной точки сечения.

*Прямой метод расчета устойчивости*

Используем для решения (1) метод Бубнова – Галёркина [2], аппроксимируя прогиб

конечным числом $n_s$ элементов тригонометрического ряда Фурье:

$$v(z)=\sum_{i=1}^{n_s}\left(a_i \sin\frac{i\pi z}{L}\right). \quad (6)$$

Представим эпюру изгибающего момента $M_0^*$ в безразмерном виде:

$$\overline{M}_0^*(\bar{z})=\overline{M}_0+\overline{M}_f=\overline{M}_{ref}\cdot\psi_m, \quad (7)$$

где $\overline{M}_0=m_{ref}\psi_{m0}\overline{N}$ — изгибающий момент при расчете по недеформированной схеме от реальных нагрузок; $m_{ref}=\dfrac{\max\left(\left|\overline{M}_0\right|\right)}{\overline{N}}\neq 0$ — референсное значение эксцентриситета продольной силы, принимаемое равным максимальному значению действительного изгибающего момента из расчета по недеформированной схеме; $\psi_{m0}=\dfrac{\overline{M}_0}{\overline{M}_{ref}}$ — форма эпюры изгибающего момента из расчета по недеформированной схеме; $\overline{M}_{ref}=m_{ref}\overline{N}$ — референсное значение изгибающего момента; $\overline{M}_f=f\left(\bar{z}\right)$ — фиктивный изгибающий момент, компенсирующий развитие пластических деформаций; $\psi_m=\dfrac{\overline{M}_0+\overline{M}_f}{\overline{M}_{ref}}=\psi_{m0}+\dfrac{\overline{M}_f}{\overline{M}_{ref}}$ — форма эпюры суммарного изгибающего момента; $\bar{z}=z/L$ — относительная координата вдоль стержня.

С учетом (7) решение запишем в безразмерном виде:

$$\bar{v}(\bar{z})=\sum_{i=1}^{n_s}\left(\bar{a}_i\cdot\psi_{s,i}\right), \quad (8)$$

где $\bar{v}=v/e_{ref}$ — безразмерное значение прогиба; $\bar{a}_i=a_i/e_{ref}$ — коэффициенты аппроксимации, записанные в безразмерном виде; $e_{ref}=\rho m_{ref}$ — референсное значение эксцентриситета продольной силы; $\psi_{s,i}=\sin\left(i\pi\bar{z}\right)$.

Коэффициенты аппроксимации рассчитываются по формуле

$$A=\begin{pmatrix}\bar{a}_1\\ \bar{a}_2\\ \bar{a}_3\\ \dots\\ \bar{a}_{n_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{1,1}&0&0&\dots&0\\ 0&b_{2,2}&0&\dots&0\\ 0&0&b_{3,3}&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&0\\ 0&0&0&0&b_{n_s,n_s}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ \dots\\ s_{n_s}\end{pmatrix}=B^{-1}S, \quad (9)$$

где $b_{i,i}=\dfrac{i^2-\overline{N}/\overline{N}_{cr}}{\overline{N}/\overline{N}_{cr}}\int_0^1\psi_{s,i}^2=\dfrac{i^2-\overline{N}/\overline{N}_{cr}}{2\,\overline{N}/\overline{N}_{cr}}$ — элементы диагональной матрицы $B$; $\overline{N}_{cr}=\dfrac{N_{cr}}{AR_y}=\dfrac{\pi^2}{\bar{\lambda}}$ — критическое значение продольной силы в безразмерном виде; $\bar{\lambda}=\dfrac{L}{i}\sqrt{\dfrac{R_y}{E}}$ — условная гибкость стержня; $i=\sqrt{I/A}$ — радиус инерции; $s_i=\int_0^1\psi_{s,i}\psi_M d\bar{z}$ — элементы столбца $S$.

Расчет интегралов $s_i$ численными методами требует вычисления эпюры момента $\psi_m\left(\bar{z}\right)$ в большом количестве точек по длине стержня, что при учете развития пластических деформаций (см. формулу (7)) затруднено. Так как функция $\psi_m\left(\bar{z}\right)$ гладкая, аппроксимируем ее кубическим сплайном, имеющим $n_c=2n_s$ участков $\left[\bar{z}_j,\bar{z}_{j+1}\right]$ (рис. 1, *д*), на каждом из которых он определяется формулой

$$\psi_{m,j}\left(\bar{z}\right)=c_{j,1}+c_{j,2}\bar{z}+c_{j,3}\bar{z}^2+c_{j,4}\bar{z}^3, \quad (10)$$

где $c_{j,1}\dots c_{j,4}$ — коэффициенты аппроксимации на $j$-м участке.

Тогда численное интегрирование $s_i$ можем заменить суммированием точных значений интегралов на $n_c$ участках:

$$s_i=\int_0^1\psi_{s,i}\psi_m d\bar{z}=\sum_{j=1}^{n_c}F_j, \quad (11)$$

где $F_j=\int_{z_j}^{z_{j+1}}\psi_{s,i}\psi_{m,j}=C_j^T D_j$ — функция расчета аналитического значения интеграла на участке $j$; $C_j=\begin{pmatrix}c_{j,4}/\left(i\pi\right)^4\\ c_{j,3}/\left(i\pi\right)^3\\ c_{j,2}/\left(i\pi\right)^2\\ c_{j,1}/\left(i\pi\right)^1\end{pmatrix}$ — столбец, учитывающий коэффициенты аппроксимации; $D_j=P\left(i,\bar{z}_{j+1}\right)-P\left(i,\bar{z}_j\right)$ — столбец, учитывающий разницу значений тригонометрических функций в начале и в конце участка $j$;

$$P\left(i,\bar{z}\right)=\begin{pmatrix}\left(3\left(i\pi\bar{z}\right)^2-6\right)&\left(\left(i\pi\bar{z}\right)^3-6i\pi\bar{z}\right)\\ 2i\pi\bar{z}&\left(i\pi\bar{z}\right)^2-2\\ 1&i\pi\bar{z}\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\left(i\pi\bar{z}\right)\\ -\cos\left(i\pi\bar{z}\right)\end{pmatrix}.$$

Эквивалентный изгибающий момент в модели упругого стержня при расчете по деформированной схеме с учетом (8) запишем в безразмерном виде:

$$\overline{M}^{*} = \overline{M}_{ref}\left(\psi_m + \bar{v}\right). \quad (12)$$

Изгибающий момент при расчете по деформированной схеме от действия реальных нагрузок получим из (12) вычитанием фиктивного изгибающего момента, что с учетом (7) дает

$$\overline{M} = \overline{M}^{*} - \overline{M}_f = \overline{M}_0 + \overline{M}_{ref}\bar{v} = \overline{N}\cdot m_{ref}\left(\psi_{m0} + \bar{v}\right). \quad (13)$$

Напряженно-деформированное состояние в сечении при действии $\overline{N}$ и $\overline{M}$ определяем путем решения относительно $\overline{N}^{*}_{new}$ и $\overline{M}^{*}_{new}$ системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \overline{N}_{trial}\left(\overline{N}^{*}_{new}, \overline{M}^{*}_{new}\right) = \overline{N}, \\ \overline{M}_{trial}\left(\overline{N}^{*}_{new}, \overline{M}^{*}_{new}\right) = \overline{M}, \end{cases} \quad (14)$$

где $\overline{N}_{trial}\left(\overline{N}^{*}_{new}, \overline{M}^{*}_{new}\right)$ и $\overline{M}_{trial}\left(\overline{N}^{*}_{new}, \overline{M}^{*}_{new}\right)$ — результаты расчета внутренних усилий по формулам (4) и (5) соответственно при распределении деформаций по формуле (3).

Для численного решения (14) используем метод Ньютона–Рафсона [3]. В качестве начального приближения используем значения, полученные на предыдущем шаге расчета. Фиктивный изгибающий момент для новой итерации расчета определим по формуле

$$\overline{M}_{f,new} = \overline{M}^{*}_{new} - \overline{M}. \quad (15)$$

Невязку фиктивного момента определим по формуле

$$\Delta\overline{M}_f = \frac{1}{n_c+1}\cdot\sum_{j=1}^{n_c+1}\left[\overline{M}_{f,new}\left(\bar{z}_j\right) - \overline{M}_f\left(\bar{z}_j\right)\right]^2. \quad (16)$$

Продольная сила при расчете устойчивости не может превышать предельное значение по условию прочности. Принимая $c = 1{,}5$, $n = 2$ в формуле (105) действующих норм, получим

$$\overline{N}_{str} = \sqrt{\left(\frac{m_{ref}}{3}\right)^2 + 1} - \frac{m_{ref}}{3}. \quad (17)$$

Значения коэффициентов устойчивости $\varphi_e$ по табл. Д.3 норм при гибкости $\bar{\lambda} = 0{,}5$ не более чем на 3,2 % превышают $\overline{N}_{str}$, вычисленную по формуле (17).

На рис. 2 показан алгоритм итерационного расчета коэффициента устойчивости стержня, а на рис. 3 — подпрограмма расчета деформации наиболее нагруженного волокна. Метод Ньютона–Рафсона и метод расчета коэффициентов кубического сплайна являются стандартными, их блок-схемы не приводим. Максимально допустимую погрешность расчета принимаем равной $\Delta_{\max} = 10^{-6}$.

В табл. 2 приведены результаты верификации разработанного метода путем сопоставления с аналитическими решениями результатов расчета деформационного коэффициента в наиболее нагруженном сечении $\bar{z}_u$:

$$K_d = \frac{\overline{M}^{*}}{\overline{M}_{ref}} = \psi_{m0} + \bar{v}. \quad (18)$$

В табл. 3 приведены результаты расчета деформационного коэффициента по формуле (17) для эпюры $\psi_{m0}$, моделирующей развитие пластических деформаций в средней части пролета стержня:

$$\psi_{m0} = \begin{cases} 0{,}5\left(1 - \cos\left(4\pi\bar{z} - \pi\right)\right), & 0{,}25 \le \bar{z} \le 0{,}75 \\ 0, & \left(\bar{z} < 0{,}25\right) \vee \left(\bar{z} > 0{,}75\right) \end{cases}. \quad (19)$$

Как видно по результатам, представленным в табл. 2–3, при $n_s = 10$ погрешность расчета деформационного коэффициента в худшем случае составляет +0,2 % (при действии сосредоточенной поперечной нагрузки).

*Обратный метод расчета устойчивости*

Обратный метод расчета устойчивости был предложен в работе [4]. Расчетная схема соответствует рис. 1, *а* при $q = 0$, $M_s = M_e = \rho mN$. Фиктивный изгибающий момент предполагается равномерно распределенным по длине стержня, следовательно, для расчета деформационного коэффициента может быть использовано аналитическое решение по табл. 2 при $\psi_m\left(\bar{z}\right) = 1$ или с погрешностью не более, чем $+7\cdot10^{-4}$, приближенное решение по формуле (9) из работы [5]. Учитывая это, по значениям усилий в наиболее нагружен-

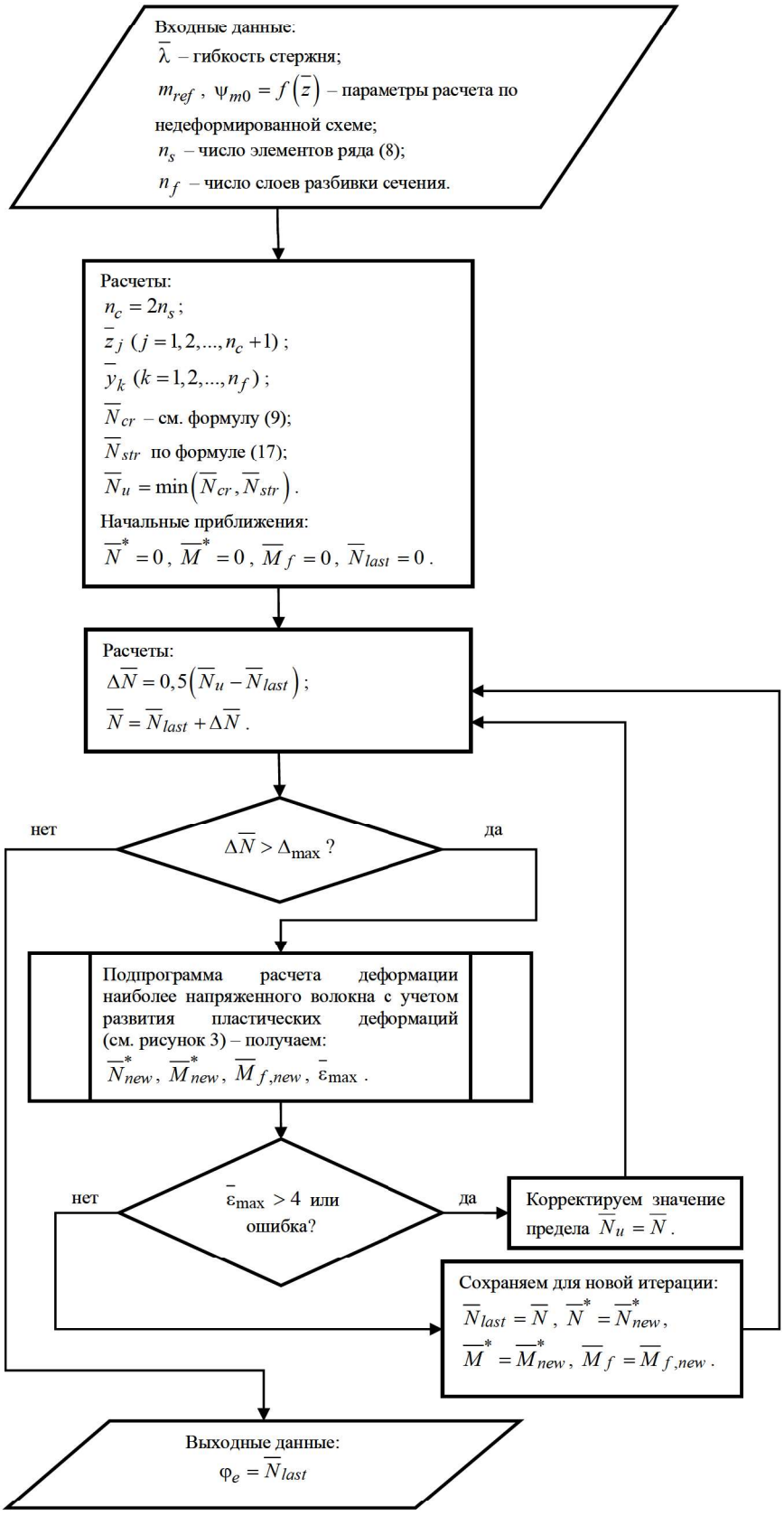



Рис. 2. Алгоритм расчета устойчивости стержня

*Таблица 2*

**Сравнение с аналитическими решениями**

| Аналитические значения | | | | Максимальная погрешность расчета $K_d$ при числе $n_s$ элементов ряда (6), % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_m(\bar{z})$ | $\bar{z}_u$ | $K_d$ | | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 |
| 1 | 0,5 | $\frac{1}{\cos(\pi n/2)}$ | | +0,936 | +0,936 | –0,173 | +0,058 | –0,026 | +0,013 |
| $1+(\psi-1)\bar{z}$ | $\bar{z}_u=\frac{1}{\pi n}\arctan\left(\frac{\psi-\cos(\pi n)}{\sin(\pi n)}\right)\geq 0$ | | $\psi=0$ | +0,123 | +0,768 | +0,460 | +0,163 | +0,08 | +0,036 |
| | | | | –3,958 | –1,227 | –0,586 | –0,224 | –0,117 | –0,054 |
| | $K_d=\frac{\psi\sin(\pi n\bar{z}_u)+\sin(\pi n(1-\bar{z}_u))}{\sin(\pi n)}$ | | $\psi=-0,5$ | +0,015 | +0,736 | +0,681 | +0,285 | +0,144 | +0,061 |
| | | | | –8,627 | –1,726 | –1,188 | –0,433 | –0,222 | –0,099 |
| $4(\bar{z}-\bar{z}^2)$ | 0,5 | $\frac{8}{(\pi n)^2}\left(\frac{1}{\cos(\pi n/2)}-1\right)$ | | –4,459 | +0,018<br>–0,221 | –0,043 | –0,005 | –0,001 | 0 |
| $2\bar{z}\Big\|_{\bar{z}=0}^{\bar{z}=0,5}$<br>$2(1-\bar{z})\Big\|_{\bar{z}=0,5}^{\bar{z}=1}$ | 0,5 | $\frac{2\tan(\pi n/2)}{\pi n}$ | | +21,3 | +5,157 | +2,277 | +0,816 | +0,416 | +0,203 |

*Примечания:*
1. Координата наиболее нагруженного сечения обозначена $\bar{z}_u$.
2. Продольная сила характеризуется параметром $n=\sqrt{N/N_{cr}}$.

*Таблица 3*

**Сходимость решения**

| $\frac{\bar{N}}{N_{cr}}$ | $\Delta K_d=2\frac{K_{d,i}-K_{d,i-1}}{K_{d,i}+K_{d,i-1}}$ | Значения при числе $n_s$ элементов ряда (6) | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0,75 | $K_d$ | 3,957 | 2,499 | 2,463 | 2,474 | 2,476 | 2,477 | 2,477 | 2,477 | 2,477 | 2,477 |
| | $\Delta K_d$, % | – | –45,155 | –1,466 | 0,464 | 0,060 | 0,056 | –0,006 | 0,014 | –0,013 | 0,006 |
| 0,85 | $K_d$ | 6,585 | 3,832 | 3,741 | 3,761 | 3,761 | 3,763 | 3,762 | 3,763 | 3,763 | 3,763 |
| | $\Delta K_d$, % | – | –52,861 | –2,399 | 0,548 | –0,019 | 0,068 | –0,018 | 0,018 | –0,014 | 0,007 |
| 0,95 | $K_d$ | 19,725 | 10,494 | 10,114 | 10,179 | 10,164 | 10,173 | 10,169 | 10,171 | 10,170 | 10,171 |
| | $\Delta K_d$, % | – | –61,093 | –3,695 | 0,643 | –0,141 | 0,082 | –0,034 | 0,022 | –0,015 | 0,008 |

ном сечении может быть рассчитан опорный эксцентриситет по формуле (29) из работы [5].

При решении обратным методом задаемся деформацией в наиболее нагруженном сечении по формуле (2). В работе [6] представлен метод определения параметра распределения деформации $k_N$, соответствующего заданному нагружению. Для поиска максимума продольной силы на графике $\bar{N}=f(\bar{\varepsilon}_{\max})$ в настоящей работе используется метод золотого сечения [3].

*Метод конечных элементов*

Расчеты выполнены в SAP2000®. Расчетная схема — плоская, соответствует рис. 1, *а* при $q=0$, $M_s=M_e=\rho mN$, составлена двадцатью стержневыми конечными элементами равной длины, в каждом из которых учитывается развитие пластических деформаций при помощи инструмента Plastic Hinge.

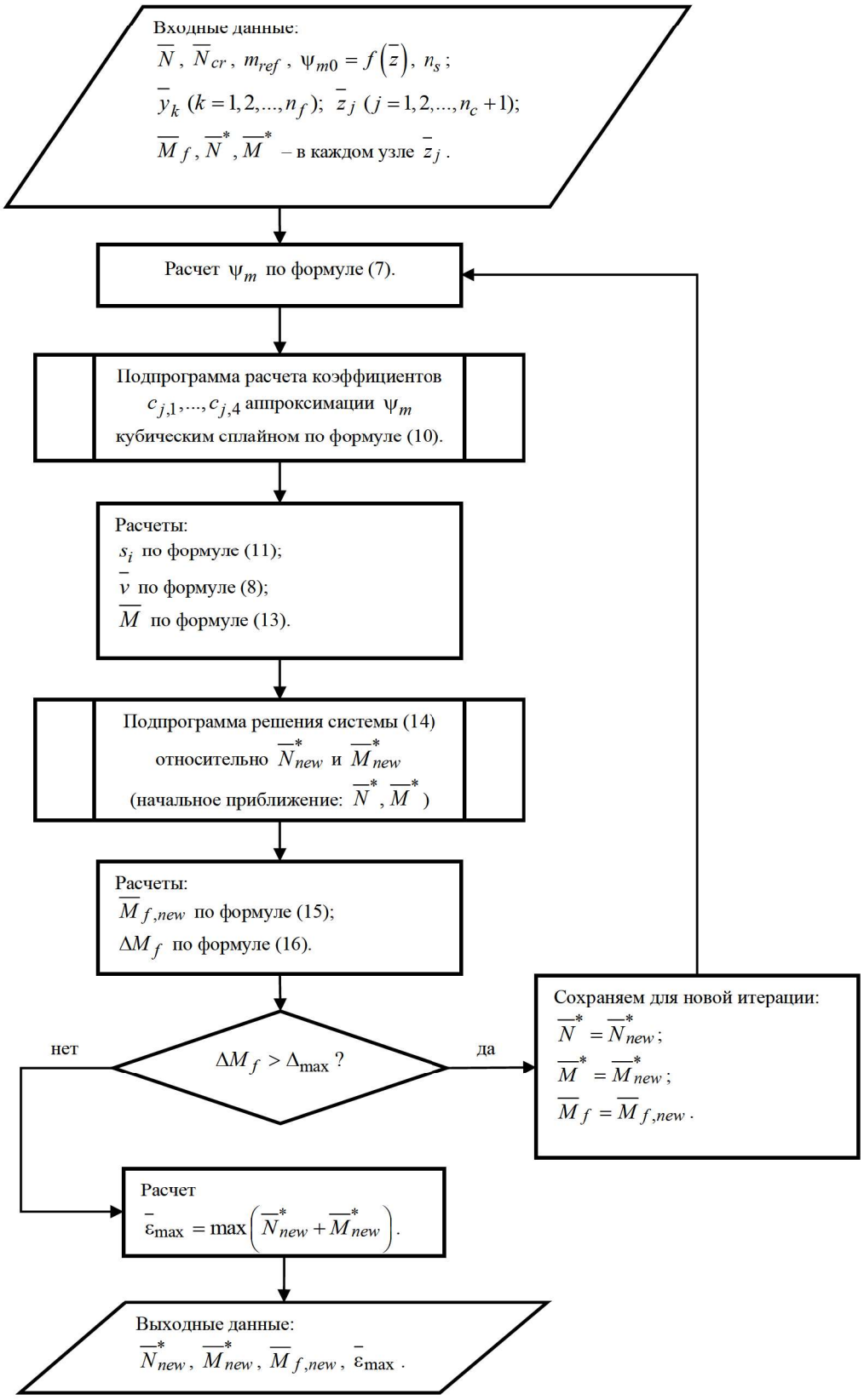



Рис. 3. Подпрограмма расчета деформации наиболее нагруженного волокна с учетом развития пластических деформаций

*Таблица 4*

**Коэффициенты устойчивости при расчете прямым методом и отклонения при расчете обратным**

| Условная гибкость $\bar{\lambda}$ | | Значения $1000 \cdot \varphi_e$ при относительном эксцентриситете $m$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,1 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 17 | 20 |
| При расчете прямым методом | 0,5 | 949 | 892 | 809 | 738 | 677 | 624 | 578 | 537 | 501 | 439 | 389 | 348 | 315 | 286 | 262 | 242 | 224 | 209 | 196 | 173 | 155 | 141 | 118 | 102 | 84 | 72 |
| | 1 | 922 | 856 | 766 | 695 | 637 | 587 | 544 | 506 | 472 | 415 | 369 | 331 | 300 | 274 | 251 | 232 | 216 | 201 | 189 | 168 | 151 | 137 | 115 | 100 | 83 | 71 |
| | 1,5 | 884 | 810 | 714 | 642 | 585 | 538 | 499 | 464 | 434 | 382 | 341 | 308 | 280 | 256 | 236 | 219 | 204 | 191 | 179 | 160 | 144 | 131 | 111 | 97 | 81 | 69 |
| | 2 | 834 | 753 | 655 | 585 | 531 | 488 | 452 | 421 | 394 | 349 | 313 | 283 | 258 | 237 | 220 | 204 | 191 | 179 | 169 | 151 | 137 | 125 | 107 | 93 | 78 | 67 |
| | 2,5 | 771 | 685 | 590 | 525 | 476 | 438 | 406 | 379 | 356 | 316 | 285 | 259 | 237 | 219 | 203 | 190 | 178 | 167 | 158 | 142 | 129 | 118 | 102 | 89 | 75 | 65 |
| | 3 | 696 | 609 | 522 | 466 | 424 | 391 | 363 | 340 | 319 | 286 | 258 | 236 | 217 | 201 | 188 | 176 | 165 | 156 | 148 | 133 | 122 | 112 | 97 | 85 | 72 | 62 |
| | 3,5 | 608 | 529 | 456 | 409 | 374 | 346 | 323 | 303 | 286 | 257 | 234 | 215 | 199 | 185 | 173 | 162 | 153 | 145 | 138 | 125 | 114 | 106 | 92 | 81 | 69 | 60 |
| | 4 | 515 | 454 | 396 | 358 | 329 | 306 | 287 | 270 | 256 | 232 | 212 | 195 | 182 | 170 | 159 | 150 | 142 | 135 | 128 | 117 | 107 | 100 | 87 | 77 | 66 | 58 |
| | 4,5 | 430 | 387 | 342 | 312 | 289 | 270 | 254 | 241 | 229 | 208 | 192 | 178 | 166 | 155 | 146 | 138 | 131 | 125 | 119 | 109 | 101 | 94 | 82 | 73 | 63 | 55 |
| | 5 | 361 | 329 | 296 | 272 | 254 | 239 | 226 | 215 | 205 | 188 | 174 | 162 | 151 | 143 | 135 | 128 | 122 | 116 | 111 | 102 | 95 | 88 | 78 | 70 | 60 | 53 |
| | 5,5 | 304 | 282 | 257 | 239 | 224 | 212 | 201 | 192 | 184 | 169 | 157 | 147 | 139 | 131 | 124 | 118 | 113 | 108 | 103 | 95 | 89 | 83 | 73 | 66 | 57 | 51 |
| | 6 | 259 | 243 | 224 | 210 | 198 | 188 | 180 | 172 | 165 | 153 | 143 | 134 | 127 | 120 | 114 | 109 | 104 | 100 | | | | | | | | |
| | 6,5 | 223 | 211 | 197 | 185 | 176 | 168 | 161 | 154 | 149 | 139 | 130 | 123 | 116 | 111 | 106 | 101 | 97 | 93 | | | | | | | | |
| | 7 | 194 | 185 | 174 | 165 | 157 | 150 | 144 | 139 | 134 | 126 | 119 | 112 | 107 | 102 | 98 | 94 | 90 | 86 | | | | | | | | |
| | 8 | 150 | 145 | 138 | 132 | 127 | 122 | 118 | 114 | 111 | 105 | 100 | 95 | 91 | 87 | 84 | 81 | 78 | 75 | | | | | | | | |
| | 9 | 119 | 116 | 111 | 107 | 104 | 101 | 98 | 95 | 93 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Условная гибкость $\bar{\lambda}$ | | Относительные отклонения $\left(\varphi_e^{\text{обр}} - \varphi_e^{\text{пр}}\right) \Big/ \varphi_e^{\text{пр}}$ (%) при относительном эксцентриситете $m$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,1 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 17 | 20 |
| При расчете обратным методом | 0,5 | –0,2 | –0,3 | –0,3 | –0,2 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,1 | –0,0 | –0,0 | –0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| | 1 | –0,5 | –0,7 | –1,0 | –1,2 | –1,2 | –1,1 | –1,1 | –1,0 | –1,0 | –0,9 | –0,8 | –0,8 | –0,7 | –0,7 | –0,6 | –0,6 | –0,5 | –0,5 | –0,5 | –0,4 | –0,4 | –0,3 | –0,2 | –0,2 | –0,2 | –0,1 |
| | 1,5 | –1,1 | –1,3 | –1,6 | –1,9 | –2,0 | –2,1 | –2,0 | –2,0 | –1,9 | –1,9 | –1,8 | –1,7 | –1,6 | –1,5 | –1,5 | –1,4 | –1,4 | –1,4 | –1,3 | –1,2 | –1,1 | –1,0 | –0,9 | –0,8 | –0,6 | –0,5 |
| | 2 | –1,7 | –2,1 | –2,4 | –2,6 | –2,7 | –2,8 | –2,7 | –2,6 | –2,6 | –2,5 | –2,4 | –2,3 | –2,2 | –2,1 | –2,0 | –1,9 | –1,9 | –1,8 | –1,8 | –1,7 | –1,6 | –1,5 | –1,4 | –1,3 | –1,1 | –1,0 |
| | 2,5 | –2,2 | –2,7 | –3,0 | –3,1 | –3,2 | –3,3 | –3,2 | –3,2 | –3,1 | –3,0 | –2,9 | –2,8 | –2,7 | –2,6 | –2,5 | –2,5 | –2,4 | –2,3 | –2,2 | –2,1 | –2,0 | –1,9 | –1,7 | –1,6 | –1,4 | –1,3 |
| | 3 | –2,6 | –3,1 | –3,4 | –3,6 | –3,6 | –3,7 | –3,6 | –3,5 | –3,5 | –3,4 | –3,3 | –3,2 | –3,1 | –3,0 | –2,9 | –2,9 | –2,8 | –2,7 | –2,6 | –2,5 | –2,4 | –2,3 | –2,1 | –1,9 | –1,8 | –1,6 |
| | 3,5 | –2,4 | –3,1 | –3,5 | –3,7 | –3,8 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,7 | –3,7 | –3,6 | –3,5 | –3,5 | –3,4 | –3,3 | –3,2 | –3,2 | –3,1 | –3,0 | –2,8 | –2,7 | –2,6 | –2,4 | –2,3 | –2,1 | –1,9 |
| | 4 | –1,8 | –2,8 | –3,4 | –3,6 | –3,8 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,8 | –3,7 | –3,7 | –3,6 | –3,5 | –3,4 | –3,4 | –3,3 | –3,3 | –3,1 | –3,0 | –2,9 | –2,7 | –2,6 | –2,3 | –2,2 |
| | 4,5 | –1,4 | –2,3 | –3,0 | –3,4 | –3,7 | –3,8 | –3,8 | –3,8 | –3,9 | –3,8 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,8 | –3,7 | –3,7 | –3,6 | –3,6 | –3,5 | –3,4 | –3,3 | –3,1 | –3,0 | –2,8 | –2,6 | –2,4 |
| | 5 | –1,0 | –1,8 | –2,7 | –3,2 | –3,4 | –3,7 | –3,6 | –3,7 | –3,8 | –3,8 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,9 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,7 | –3,7 | –3,6 | –3,5 | –3,4 | –3,2 | –3,1 | –2,8 | –2,6 |
| | 5,5 | –0,8 | –1,5 | –2,4 | –2,8 | –3,2 | –3,3 | –3,4 | –3,5 | –3,7 | –3,7 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,8 | –3,8 | –3,7 | –3,7 | –3,7 | –3,6 | –3,4 | –3,3 | –3,1 | –2,9 |
| | 6 | –0,6 | –1,2 | –2,0 | –2,6 | –2,9 | –3,1 | –3,2 | –3,3 | –3,4 | –3,6 | –3,7 | –3,8 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | | | | | | | | |
| | 6,5 | –0,4 | –1,0 | –1,7 | –2,3 | –2,6 | –2,8 | –3,0 | –3,1 | –3,3 | –3,4 | –3,6 | –3,7 | –3,8 | –3,8 | –3,9 | –3,9 | –4,0 | –4,0 | | | | | | | | |
| | 7 | –0,3 | –0,8 | –1,6 | –2,0 | –2,4 | –2,5 | –2,6 | –2,8 | –3,0 | –3,3 | –3,4 | –3,6 | –3,7 | –3,7 | –3,8 | –3,9 | –3,9 | –3,9 | | | | | | | | |
| | 8 | –0,2 | –0,7 | –1,1 | –1,6 | –1,9 | –2,1 | –2,3 | –2,5 | –2,6 | –2,8 | –3,0 | –3,2 | –3,5 | –3,6 | –3,6 | –3,7 | –3,8 | –3,8 | | | | | | | | |
| | 9 | –0,2 | –0,5 | –0,9 | –1,3 | –1,6 | –1,7 | –1,9 | –2,0 | –2,2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

*Таблица 5*

**Отклонения коэффициента устойчивости, %**

| Метод расчета | Отклонения $\left(\varphi_e - \varphi_e^{\text{пр}}\right)\Big/\varphi_e^{\text{пр}}$ от результатов расчета прямым методом | | |
|---|---|---|---|
| | Минимальное | Максимальное | Средний модуль |
| Обратный метод | –4,0 | 0 | 2,4 |
| Табл. Д.3 норм | –4,3 | +6,9 | 1,3 |
| Выборка по табл. Д.3 норм | –1,5 | +2,6 | 0,7 |
| Метод конечных элементов | –0,5 | +0,6 | 0,1 |

Поперечное сечение составлено двадцатью волокнами равной площади, расположенными равномерно по высоте сечения. Размеры сечения приняты $b = h = 60$ мм, параметры стали: $R_y = 320$ МПа, $E = 200$ ГПа.

В качестве нагрузки приложена продольная сила $N = AR_y$ и соответствующий эксцентриситету изгибающий момент. Расчет выполнен геометрически нелинейный, с учетом больших перемещений, итерационным алгоритмом с использованием не более 40 итераций метода Ньютона–Рафсона на шаг нагрузки. Минимальное количество шагов принято равным десяти, при этом алгоритм расчета уменьшает вдвое шаг нагрузки, если итерационный процесс расходится вследствие потери устойчивости стержня, поэтому величина нагрузки автоматически приближается к предельной.

Элементы с гибкостью $\bar{\lambda} \le 1,5$ рассчитаны с использованием 1000 шагов нагрузки, для определения коэффициента устойчивости по критерию достижения предельной пластической деформации $\bar{\varepsilon}_u = 4$ с точностью до трех знаков в тех случаях, когда деформация наиболее нагруженного волокна при потере устойчивости $\bar{\varepsilon}_{\max} > \bar{\varepsilon}_u$.

**Результаты**

Выполнены расчеты коэффициентов устойчивости $\varphi_e$ для значений $\bar{\lambda}$ и $m$ по табл. Д.3 норм прямым, обратным методами (табл. 4) и методом конечных элементов. Во всех случаях использовалось $n_f = 20$ слоев по высоте сечения. Результаты расчета прямым методом принимаем за основные, относительно которых рассчитаем отклонения результатов расчетов другими методами (табл. 5).

При формировании выборки по табл. Д.3 норм исключены результаты при $\bar{\lambda} = 0,5$ (обусловленные только прочностью сечения) и $\bar{\lambda} = 1$ (переходные значения), а также при $m < 0,5$ (определяющей является проверка устойчивости при центральном сжатии) и $m > 10$ (большая погрешность округления).

**Обсуждение**

Прямой метод расчета устойчивости, предложенный в статье, позволяет учитывать произвольное загружение и неравномерное распределение пластических деформаций по длине стержня. Показано, что при использовании десяти элементов ряда (6) значения деформационного коэффициента для разных загружений с высокой точностью соответствуют аналитическим решениям, которые использовались в том числе при разработке метода расчета устойчивости [7–9] EN 1993-1-1:2005[6]. Остаточные напряжения от сварки или прокатки [10–11] могут быть учтены путем задания начальной деформации для каждого волокна.

Результаты расчета коэффициентов устойчивости прямым методом отлично согласуются с результатами расчета методом конечных элементов.

Обратный метод расчета устойчивости не предполагает итерационного уточнения распределения пластических деформаций,

[6] Eurocode 3: Design of steel structures — Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: European committee for standardization, 2005.

за счет чего на порядок быстрее и дает консервативную оценку. Он был использован при решении ряда важных практических задач [12–15].

Полученные результаты хорошо согласуются с нормативными значениями коэффициентов устойчивости. Максимальные отклонения связаны с неточностями в нормативных таблицах, в то время как результаты расчета прямым методом и методом конечных элементов для соответствующих параметров $m$ и $\overline{\lambda}$ отлично согласуются.

**Выводы**

1. Коэффициенты устойчивости $\varphi_e$, представленные в табл. 4, рассчитанные прямым методом и верифицированные МКЭ-расчетом, могут быть напрямую перенесены в табл. Д.3 норм при их обновлении.

2. Обратный метод расчета устойчивости дает консервативную оценку, но обеспечивает достаточную для инженерных расчетов точность, при этом на порядок быстрее прямого.

3. Предложенный алгоритм прямого расчета может быть использован для уточнения нормативных коэффициентов влияния формы сечения, для расчета коэффициентов влияния формы нестандартных сечений, а также для расчета коэффициентов устойчивости с учетом действительного распределения изгибающего момента.

**Библиографический список**


1. *Соболев Ю. В.* Теория стальных строительных конструкций. СПб.: Политехника, 2021. 542 с.

2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

3. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes. The art of Scientific Computing. 3rd edition. New York: Cambridge University Press, 2007. Pp. 442–486.

4. *Белый Г. И.* Развитие методов расчета стержневых элементов стальных конструкций при многопараметрическом загружении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 3 (80). С. 43–54. DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-43-54.

5. *Белый Г. И., Гарипов А. И.* Теоретические основы проверки устойчивости тонкостенных элементов стальных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 4. С. 33–42. DOI 10.33622/0869-7019.2025.04.33-42.

6. *Гарипов А. И.* Определение параметров деформированного состояния в сечении при расчете стержневых элементов стальных конструкций обратным методом // Вестник гражданских инженеров. 2025. № 3 (110). С. 29–37. DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-3-29-37.

7. *Bureau A., Galéa Y., Jaspart J.-P., Maquoi R., Muzeau J.-P., Villette M.* Proposal for a revision of Eurocode 3 // TC8-ECCS meeting. Timisoara, 1999.

8. *Boissonnade N., Jaspart J.-P., Muzeau J.-P., Villette M.* A proposal for beam-column interaction formulae // Proceedings of the 3rd International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures, CIMS2000. Lisbon, 2000. Coupled Instabilities in Metal Structures. August 2000. Pp. 697–704.

9. *Boissonnade N., Jaspart J.-P., Muzeau J.-P., Villette M.* Improvement of the interaction formulae for beam columns in Eurocode 3 // Computers & Structures. 2002. Vol. 80 (27–30). Pp. 2375–2385.

10. *Young B. W.* Residual stresses in hot rolled members // IABSE reports of the working commissions. 1975. Vol. 23. Pp. 25–38.

11. *Конин Д. В., Фимкин А. И., Олуромби А. Р.* Остаточные напряжения в двутаврах и их влияние на устойчивость стержней // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2023. Vol. 19 (2). Pp. 172–187.

12. *Смирнов М. О.* Совершенствование обратного численно-аналитического метода расчета ЛСТК на устойчивость при внецентренном сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 1 (84). С. 46–52. DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-1-46-52.

13. *Белый Г. И., Ведерникова А. А.* Исследование прочности и устойчивости трубобетонных элементов конструкций обратным численно-аналитическим методом // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 2 (85). С. 26–35. DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-2-26-35.

14. *Белый Г. И., Лобовский М. О.* Устойчивость ветвей решетчатых элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2023. № 2 (97). С. 18–29. DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-2-18-29.

15. *Белый Г. И., Матвеев Е. А.* Совершенствование метода расчета поврежденных элементов стальных конструкций // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 4. С. 544–556. DOI 10.22227/1997-0935.2024.4.544-556.

16. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. М.: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. С. 121–125.

## References

1. Sobolev Yu. V. *Teoriya stal'nykh stroitel'nykh konstruktsiy* [Theory of steel building structures]. St. Petersburg, Politekhnika Publ., 2021, 542 p.

2. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. 5-th ed. Moscow, Leningrad, Fizmatgiz Publ., 1962, 708 p.

3. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes. The art of Scientific Computing.* 3rd edition. New York, Cambridge University Press, 2007, pp. 442–486.

4. Beliy G. I. *Razvitie metodov rascheta sterzhnevykh elementov stal'nykh konstruktsiy pri mnogoparametricheskom zagruzhenii* [Development of methods for calculating rod elements of steel structures during multi-parameter loading]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers,* 2020, no. 3 (80), pp. 43–54. DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-43-54.

5. Beliy G. I., Garipov A. I. *Teoreticheskie osnovy proverki ustoychivosti tonkostennykh elementov stal'nykh konstruktsiy* [Theoretical foundations for testing the stability of thin-walled elements of steel structures]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and Civil Engineering,* 2025, no. 4, pp. 33–42. DOI 10.33622/0869-7019.2025.04.33-42.

6. Garipov A. I. *Opredelenie parametrov deformirovannogo sostoyaniya v sechenii pri raschete sterzhnevykh elementov stal'nykh konstruktsiy obratnym metodom* [Determination of parameters of deformed state in the section when calculating the rod elements of steel structures by the reverse method]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers,* 2025, no. 3 (110), pp. 29–37. DOI 10.23968/1999-5571-2025-22-3-29-37.

7. *Bureau A., Galéa Y., Jaspart J.-P., Maquoi R., Muzeau J.-P., Villette M. Proposal for a revision of Eurocode 3. TC8-ECCS meeting.* Timisoara, 1999.

8. *Boissonnade N., Jaspart J.-P., Muzeau J.-P., Villette M.* A proposal for beam-column interaction formulae. *Proceedings of the 3rd International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures,* CIMS2000. Lisbon, 2000. *Coupled Instabilities in Metal Structures*. August 2000, pp. 697–704.

9. *Boissonnade N., Jaspart J.-P., Muzeau J.-P., Villette M.* Improvement of the interaction formulae for beam columns in Eurocode 3. *Computers & Structures*, 2002, vol. 80 (27–30), pp. 2375–2385.

10. *Young B. W.* Residual stresses in hot rolled members. *IABSE reports of the working commissions*, 1975, vol. 23, pp. 25–38.

11. Konin D. V., Fimkin A. I., Olurombi A. R. *Ostatochnye napryazheniya v dvutavrakh i ikh vliyanie na ustoychivost' sterzhney* [Residual stresses in I-beams and their effect on rod stability]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering,* 2023, vol. 19 (2), pp. 172–187.

12. Smirnov M. O. *Sovershenstvovanie obratnogo chislenno-analiticheskogo metoda rascheta LSTK na ustoychivost' pri vnetsentrennom szhatii* [Improvement of the inverse numerical and analytical method for calculating LSTK for stability under eccentric compression].*Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers,* 2021, no. 1 (84), pp. 46–52. DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-1-46-52.

13. Beliy G. I., Vedernikova A. A. *Issledovanie prochnosti i ustoychivosti trubobetonnykh elementov konstruktsiy obratnym chislenno-analiticheskim metodom* [*Study* of strength and stability of tubular concrete structural elements by the inverse numerical and analytical method]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers,* 2021, no. 2 (85), pp. 26–35. DOI 10.23968/1999-5571-2021-18-2-26-35.

14. Beliy G. I., Lobovskiy M. O. *Ustoychivost' vetvey reshetchatykh elementov stal'nykh konstruktsiy* [Stability of branches of lattice elements of steel structures]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers,* 2023, no. 2 (97), pp. 18–29. DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-2-18-29.

15. Beliy G. I., Matveev E. A. *Sovershenstvovanie metoda rascheta povrezhdennykh elementov stal'nykh konstruktsiy* [Improvement of the method of calculation of damaged elements of steel structures]. *Vestnik MGSU – MGSU Bulletin,* 2024, vol. 19, iss. 4, pp. 544–556. DOI 10.22227/1997-0935.2024.4.544-556.

16. Il'yushin A. A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugo-plasticheskie deformatsii* [Plasticity. PART 1. Elastic-plastic deformations]. Moscow, OGIZ. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1948, pp. 121–125.