

УДК 69.04

© Г. Н. Ширунов, канд. техн. наук, доцент  
(Санкт-Петербургский государственный университет)  
© Ш. С. Тугутов, канд. техн. наук, инженер  
(ООО «ТЕКТОН»)  
© А. Ниджад, канд. техн. наук, ст. преподаватель  
(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)  
© Д. А. Сарвили, инженер  
(ООО «ТЕКТОН»)  
E-mail: guriyn@mail.ru, shagdar77@mail.ru, amrnijad@mail.ru, sarvilin\_denis@mail.ru

© G. N. Shirunov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor  
(Saint-Petersburg State University)  
© Sh. S. Tugutov, PhD in Sci. Tech., engineer  
(OOO "TEKTON")  
© A. Nidzhad, PhD in Sci. Tech., senior lecturer  
(Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering)  
© D. A. Sarvilin, engineer  
(OOO "TEKTON")  
E-mail: guriyn@mail.ru, shagdar77@mail.ru, amrnijad@mail.ru, sarvilin\_denis@mail.ru

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ОБЪЕМНЫХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ТОЛСТОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ЗАДЕЛАННЫМИ БОКОВЫМИ ГРАНЯМИ

### COMPARATIVE ANALYSIS OF CONVERGENCE OF 3D FEM MODELS FOR THE PROBLEM OF BENDING A THICK ISOTROPIC PLATE WITH CLAMPED EDGES

С помощью метода конечных элементов в пространственной постановке проводится исследование напряженно-деформированного состояния толстой изгибаемой изотропной плиты с заделанными боковыми гранями, нагруженной по верхней грани нормальной распределенной нагрузкой со свободной нижней гранью. Реализация моделей выполнена для различных разбиочных сеток с применением широко распространенных программных КЭ-комплексов SCAD, ANSYS, Ing+, Midas, использующих разные типы конечных элементов. Обсуждается сходимость полученных результатов для различных компонентов напряженно-деформированного состояния в середине плиты, в середине заделанной кромки и в углу плиты. Проведено сравнение результатов с решением численно-аналитическим методом суперпозиции. Указаны размеры областей, в которых не удается удовлетворить заданным граничным условиям и решения МКЭ расходятся. Сравнительные данные представлены в графическом виде.

*Ключевые слова:* теория упругости, толстая изотропная плита, метод конечных элементов, сходимость решений, численно-аналитическое решение, метод суперпозиции.

The paper presents the results of the analysis of bending of a thick isotropic plate clamped on its four side faces under a uniformly distributed load on the upper horizontal face by various types of 3D FEM-models using differ mesh. The comparison of the results of 3D-FEM modeling for various mesh types is carried out using SCAD, ANSYS, Ing+, Midas programs with the numerical-analytical solution using different types of finite elements. Convergence of the results obtained for the different components of the stress-strain state in the middle of a plate, in the middle of the clamped edge and in the corner of the plate is discussed. The results obtained are compared with the solution made by the analytic method of superposition. The dimensions of the areas where the obtained results do not satisfy the given boundary conditions and diverge from the FEM solutions are determined. Comparative data are presented by graphics.

*Keywords:* theory of elasticity, thick isotropic plate, finite element method, comparison of solution, numerical-analytical solution, superposition method.

**Введение.** Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) такого широко распространенного элемента конструкций, как толстая изгибаемая плита с заделанными бо-

выми гранями, представляет значительные математические трудности. Эта актуальная в механике деформируемого твердого тела задача по существу является известной задачей Ламе для

параллелепипеда с произвольно нагруженными гранями [1]. Точного решения теории упругости (ТУ) для такого объекта не найдено, соответствующая краевая задача математической ТУ в аналитической постановке сводится к решению бесконечных систем алгебраических уравнений [2].

В практической инженерной деятельности данная задача решается численно, как правило с помощью метода конечных элементов (МКЭ), имеющего наибольшее распространение и реализованного во многих программных комплексах. Так как МКЭ является численным и приближенным методом, для получаемых результатов требуется оценка их точности. Разработчиками комплексов решается ряд верификационных задач, в которых сравниваются результаты с известными решениями, полученными альтернативными методами, определяется точность выполнения заданным граничным условиям (ГУ), либо исследуется сходимости решения при измельчении разбивочной сетки [3–6]. Однако результаты подобных тестовых задач не всегда могут быть признаны исчерпывающими, так как по ряду причин не полностью отражают все особенности НДС объекта.

Во-первых, для теста не всегда выбирается адекватная расчетная модель объекта. Так, например, в случае толстых плит нельзя применять модели, пригодные для плит средней толщины (уточненные модели Рейсснера–Миндлина), так как вносимые допущения искажения в распределение компонентов НДС существенны, особенно в окрестности границы. Например, при попытке смоделировать толстую шарнирно-опертую плиту при соотношении  $H/L = 1/3$  в SCAD [7] значения перемещений и напряжений в центре плиты получаются близкими к точному решению, а значения усилий в окрестности границы имеют качественно неверную картину распределения.

Во-вторых, часто при исследовании сходимости при измельчении разбивки сравнение производится для компонентов НДС в тех областях, где эта сходимость обычно наблюдается, а о поведении медленно сходящихся компонентов «стыдливо умалчивается» [3]. Для изгибаемой, заделанной по кромкам плиты напряжения на заделанной грани, где естественно ожидать их максимальных величин, имеют не меньшее зна-

чение, чем перемещения и напряжения в центре плиты.

В-третьих, в решениях, принимаемых в качестве эталонных, которые сами являются приближенными, даются неточные значения компонентов НДС, а некоторые отсутствуют. Так, в качестве эталона для изгибаемой защемленной плиты в верификационных тестах ряда МКЭ-комплексов [6, 8, 11] используют известное приближенное аналитическое решение пространственной задачи ТУ для толстых плит Б. М. Лисичина, которое построено на основе применения теоремы о взаимности работ Бетти, где искомыми функциями перемещений разыскиваются в виде полиномов Лежандра степени 7 [12]. Это решение, являясь приближенным, не дает верных результатов на границе плиты, где напряжения должны быть равны заданной нагрузке, а касательные напряжения не приводятся.

В известных отечественных МКЭ-комплексах SCAD, LIRA, Ing+ данная задача рассматривается в качестве верификационного теста в пространственной постановке. В Midas изгибаемая плита моделируется только с помощью пластинчатых элементов, в ANSYS не приводится.

В данной работе для минимизации погрешности расчета конечно-элементная модель толстой плиты строится на основе объемных КЭ и значения напряжений определяются непосредственно из решения пространственной задачи ТУ без использования интегральных силовых факторов — моментов и сил. Рассматривается несколько моделей, построенные с помощью четырех МКЭ-комплексов: SCAD, ANSYS, Ing+, Midas, реализующих конечные элементы с различными базисными функциями.

Сходимость моделей проверяется сравнением результатов по заданным ГУ, наличием асимптотического поведения параметров НДС при измельчении сетки и сравнением с численно-аналитическим решением, полученным методом суперпозиции [13, 14]. Решение, используемое в качестве эталонного, построено методом суперпозиции трех решений метода начальных функций [15, 16].

#### Постановка задачи

Параметры постановочной задачи приняты такими же, как в работе [12]: размеры плиты в плане  $3 \times 3$  м, толщина 1 м, модуль упругости



$E = 1 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , интенсивность нагрузки, приложенной к верхней грани,  $q = 10$  кН/м<sup>2</sup>, нижняя грань свободна от нагрузок. Расчетная схема плиты изображена на рис. 1.

Исследование сходимости моделей проводится для разных типов КЭ с различной плотностью сетки разбиения. Конечные элементы приняты в виде параллелепипеда. Для обеспечения монотонной сходимости МКЭ [17] схемы дискретизации моделей приняты такими, что элементы каждого последующего уровня представляют собой части соответствующих элементов предыдущего уровня, и подмножество разбиений каждого уровня содержится в подмножествах предыдущего уровня.

Для этого плита последовательно и равномерно разбивается в плане на  $n$ , по высоте на  $k$  КЭ:  $\frac{L}{n} \frac{H}{k}$ . Рассмотрено пять схем разбиения плиты:

$$\begin{aligned} \text{№ 1} & - \frac{L}{20} \frac{H}{10}, \text{ № 2} - \frac{L}{30} \frac{H}{15}, \text{ № 3} - \frac{L}{60} \frac{H}{25}, \\ \text{№ 4} & - \frac{L}{100} \frac{H}{40}, \text{ № 5} - \frac{L}{150} \frac{H}{50}. \end{aligned}$$

Для анализа поведения моделей использовалось несколько широко известных в расчетной практике комплексов, которые позволили при-

менить разного типа конечные элементы, реализованные в программах: SCAD, Ing+, ANSYS, Midas. В модели SCAD (схемы обозначены индексом  $a$ ) используются 8-узловые конечные элементы; ANSYS ( $b$ ) — 12-узловые КЭ; Ing+ ( $c$ ) — 8-узловые гибридные КЭ; Midas ( $d$ ) — 20-узловые гибридные КЭ. Сравнение результатов расчета для компонентов НДС проведено для центра плиты, в углу и в середине боковой грани. Значения компонентов, полученных методом суперпозиции, на рисунках обозначены индексом «SP», напряжений, заданных на границе — «Exact».

В силу симметрии задачи в расчетных схемах рассматривалась четверть плиты.

### Результаты расчетов и их анализ

Центр плиты:  $x = y = L/2$ .

Полученные значения вертикальных перемещений  $w$  для всех схем достаточно быстро сходятся и близки между собой. Распределение перемещений по толщине плиты показано на рис. 2,  $a$ .

Результаты незначительно отличаются друг от друга для различных КЭ и при различных сетках. Эффект обжатия, вследствие которого экстремальное значение находится на некоторой глубине от верхней грани, удается выявить начиная с сетки № 2. Графики сходимости  $w$ ,

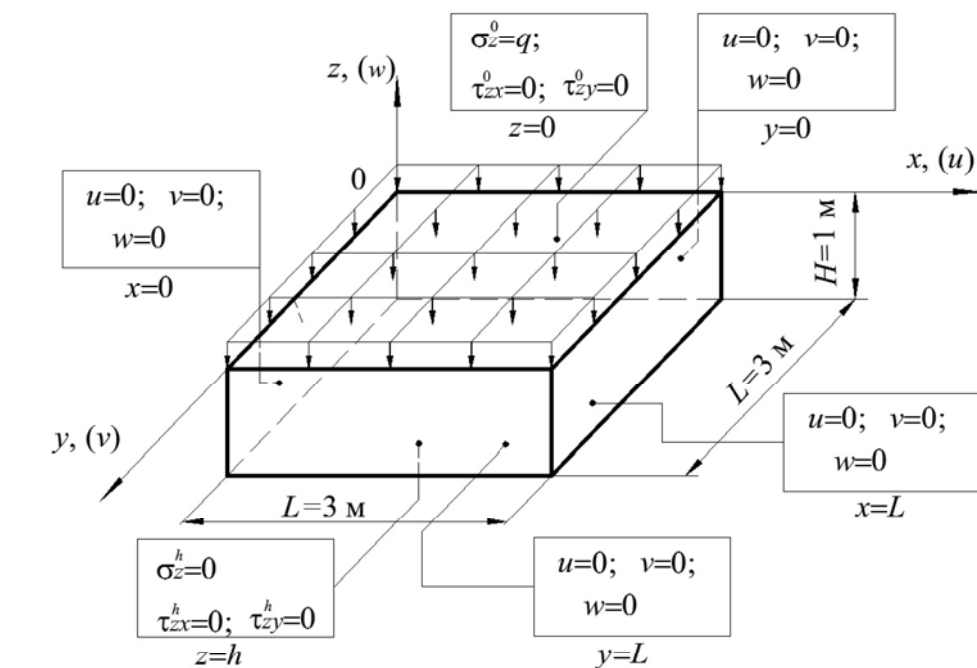


Рис. 1. Расчетная схема

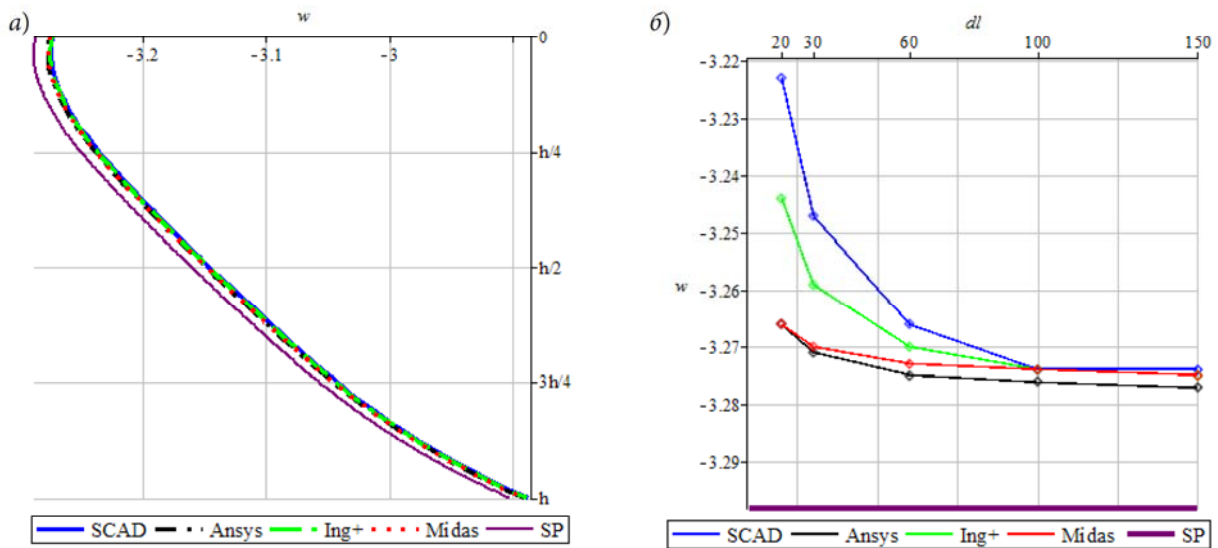


Рис. 2. Результаты расчета вертикальных перемещений: а — относительные вертикальные перемещения  $w^* = wE/(q/H)$  по высоте в центре плиты ( $x = L/2, y = L/2$ ), см; б — график сходимости результатов по максимальному значению перемещения  $w^*(n)$  в зависимости от густоты разбиения сетки и вида конечных элементов

построенные по их максимальным значениям, показаны на рис. 2, б.

Характер распределения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по толщине плиты изменяется незначительно при изменении сетки и типа КЭ, значения практически совпадают с полученными методом суперпозиции.

Нормальные напряжения  $\sigma_z$  для модели а достаточно точно описываются даже при грубой

разбивке практически по всей толщине плиты, за исключением окрестностей верхней и нижней граней (рис. 3). Однако с измельчением сетки решение сходится и удается удовлетворить граничным условиям на гранях с достаточно высокой точностью.

Для моделей б, с и d напряжения  $\sigma_z$  достаточно близки к точному значению, начиная с первой схемы разбивки, и быстро сходятся (рис. 3, б).

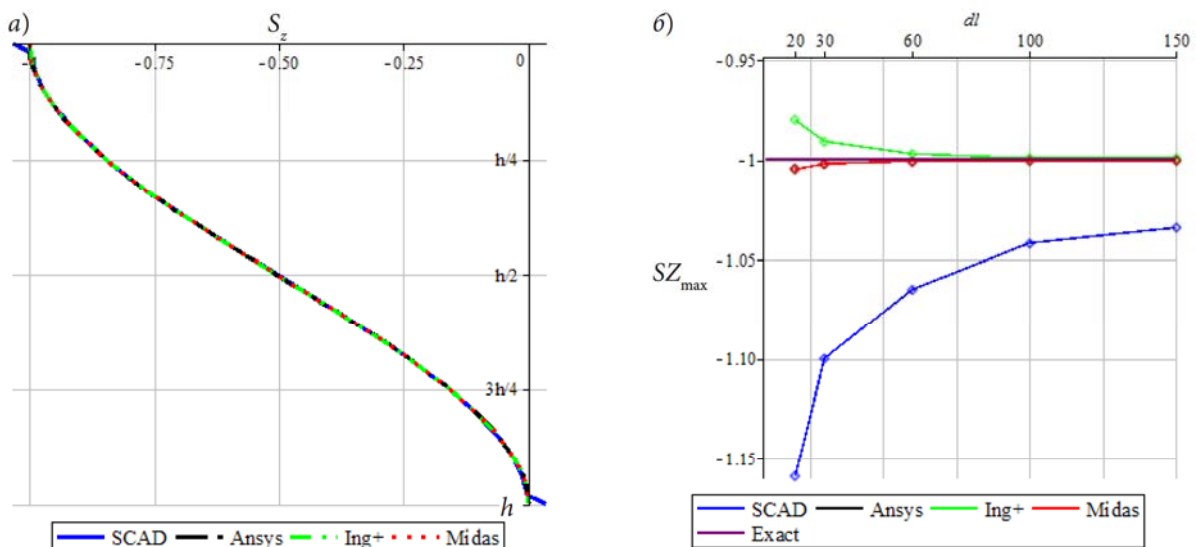


Рис. 3. Результаты расчета нормальных напряжений: а — относительные нормальные напряжения  $\sigma_z^* = \sigma_z/q$  в центре плиты ( $x = L/2, y = L/2$ ); б — график сходимости результатов по максимальному значению  $\sigma_z^*$  в зависимости от густоты разбиения сетки и вида конечных элементов

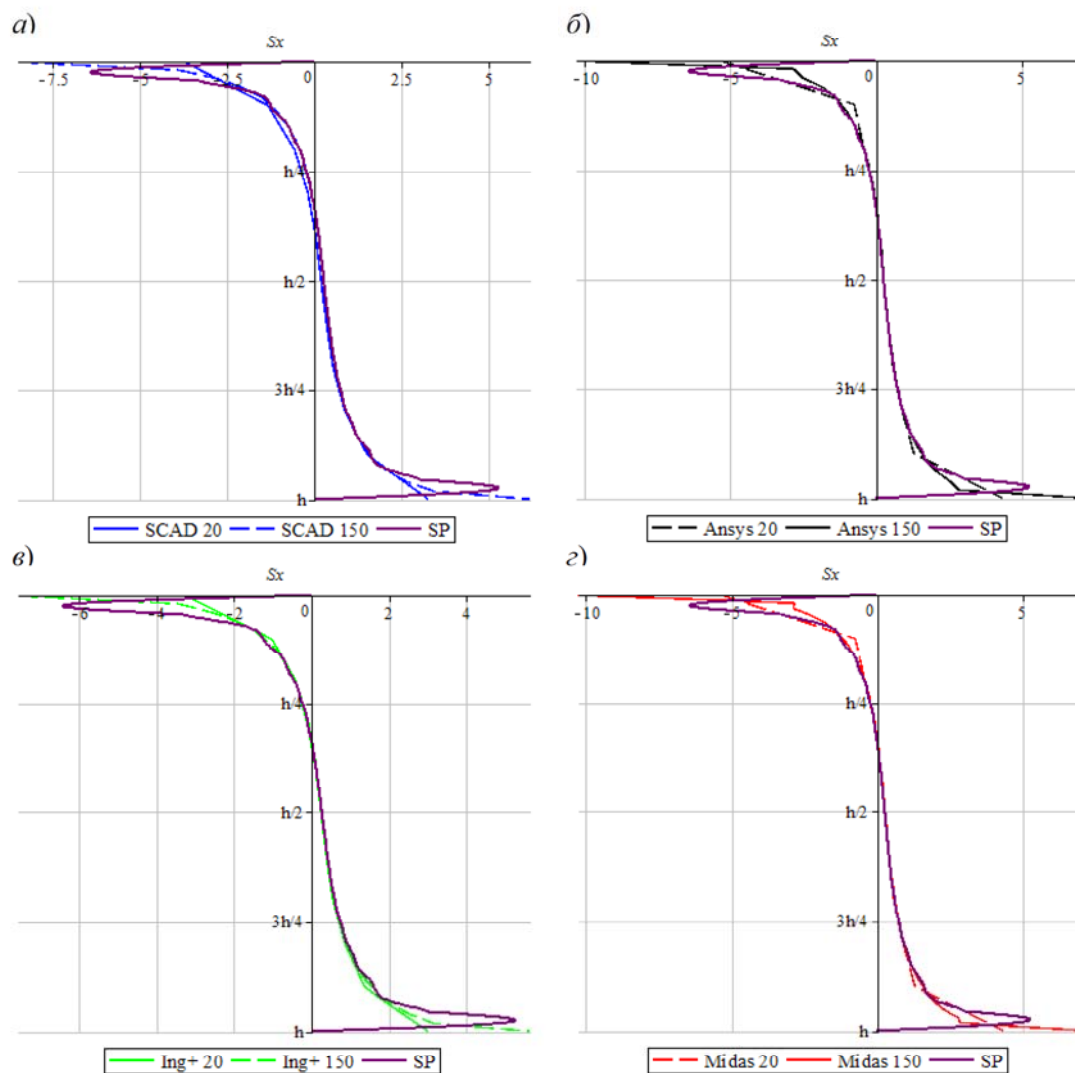


Рис. 4. Нормальные напряжения  $\sigma_x$  в центре опорной грани ( $x = 0, y = L/2$ ) при минимальной  $n = 20$  и максимальной  $n = 150$  густоте разбивочных сеток: а — SCAD; б — ANSYS; в — Inq+; г — Midas

В центре плиты рассмотренные компоненты НДС  $w, \sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  хорошо описываются всеми типами конечных элементов и, как предполагает идея МКЭ, уточняются при измельчении сетки.

Середина заделанной грани плиты:  $x = 0; y = L/2$ .

Характер распределения напряжения  $\sigma_x$  незначительно отличается друг от друга в различных моделях и при различных сетках практически по всей толщине плиты, за исключением окрестностей верхней и нижней граней, где значения напряжений значительно отличаются как между моделями, так и для различных схем разбивки (рис. 4). Чтобы не затенять рисунок, пока-

заны только графики при минимальной  $n = 20$  и максимальной  $n = 150$  густоте разбивочных схем. При этом для всех решенных задач характерно следующее: по мере сгущения сетки значения нормальных напряжений возрастают, а графики (рис. 5), построенные по максимальным значениям, свидетельствуют об отсутствии сходимости.

Распределения напряжения  $\sigma_z$  для всех моделей и схем имеют схожий S-образный характер, однако значения определяются неправильно, так как не удовлетворяются заданные граничные условия на верхней и нижней гранях плиты. С измельчением КЭ сетки абсолютная погреш-

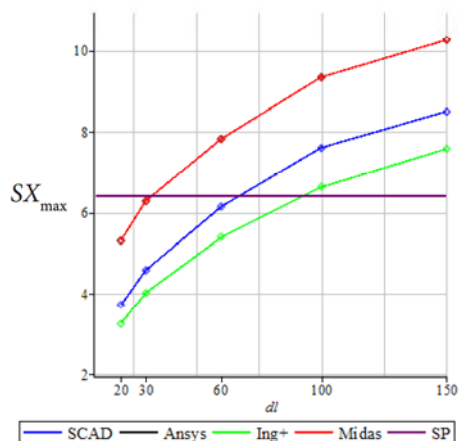


Рис. 5. График сходимости результатов по максимальному значению  $\sigma_x$  в середине опорной грани ( $x = 0, y = L/2$ ) в зависимости от плотности разбиения сетки и вида конечных элементов

ность нарастает для всех рассмотренных расчетных схем — по мере сгущения сетки значения нормальных напряжений увеличиваются, всё более отличаясь от заданных ГУ, что свидетельствует об отсутствии сходимости.

Распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  имеют схожий между моделями характер в большей части толщины плиты (рис. 6). При этом значения напряжения  $\tau_{xz}$  определяются правильно (близки к решению методом суперпозиции) только на некотором отдалении от горизонтальных граней. Графики (рис. 7), построенные по максимальным значениям  $\tau_{xz}$ , полученным на верхней грани, свидетельствуют об отсутствии сходимости, хотя в этих точках они должны быть равны нулю по условию задачи. С измельчением

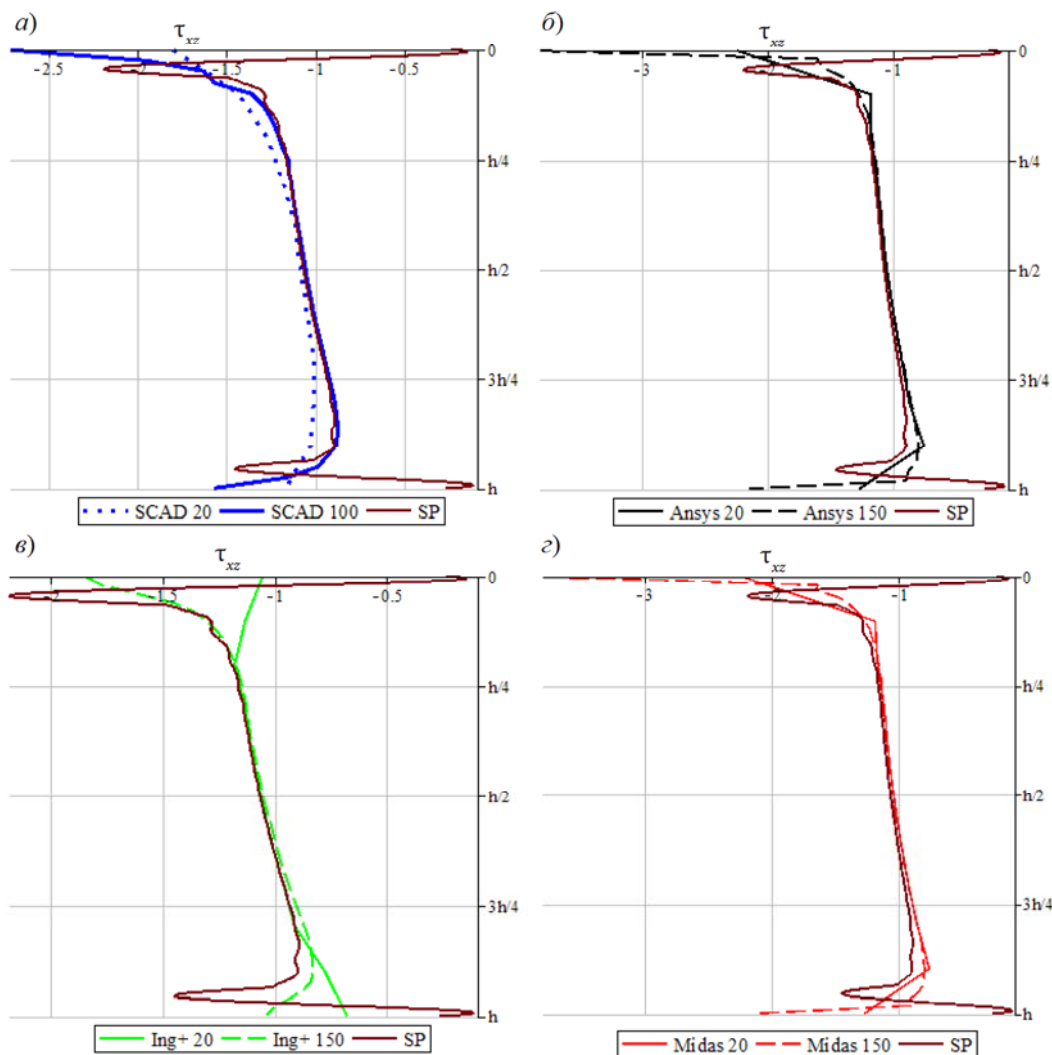


Рис. 6. Касательные напряжения  $\tau_{xz}$  в середине опорной грани ( $x = 0, y = L/2$ ): а — SCAD; б — ANSYS; в — Ing+; г — Midas



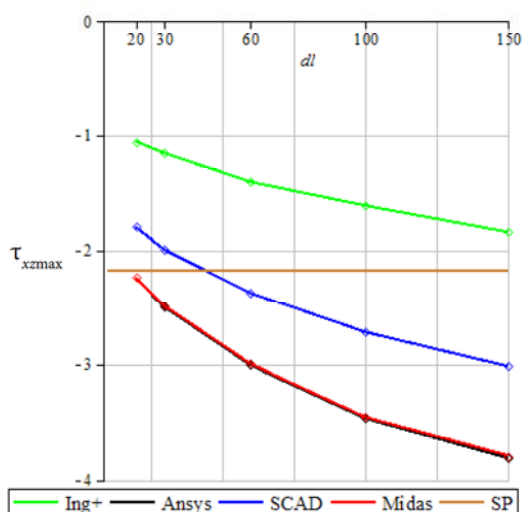


Рис. 7. График сходимости результатов по максимальному значению  $\tau_{xz}^*$  в середине опорной грани ( $x = 0, y = L/2$ ) в зависимости от плотности разбиения сетки и вида конечных элементов

КЭ-сетки эта погрешность нарастает для всех рассмотренных моделей. Кроме того, принятое за эталонное численно-аналитическое решение методом суперпозиции показывает, что эпюра касательных напряжений  $\tau_{xz}$  имеет два локальных экстремума, расположенных вблизи верхней и нижней граней. Модели *a* и *b* не выявляют этих экстремумов вне зависимости от разбиения. С помощью гибридных КЭ модели *c* удастся обнаружить такие экстремумы, но только на схемах разбиения 2 и 3, при сгущении сетки экстремумы исчезают и нарастает неточность удовлетворения граничным условиям.

Угол плиты:  $x = 0; y = 0$ .

Значения напряжения  $\tau_{xy}$  в угловой точке в КЭ-моделях *a* (SCAD) равны нулю. Характер распределения по толщине плиты в моделях *b*, *c* и *d* показаны на рис. 8, качественная картина схожа. При этом очевидна сходимость решений у верхней грани плиты. В окрестности нижней грани результаты решений расходятся. Сравнение напряжений  $\tau_{xy}$  с численно-аналитическим решением методом суперпозиции обнаруживает значительное расхождение в абсолютных значениях (рис. 9).

#### Выводы по полученным результатам

Анализ полученных результатов показывает, что в основной области плиты, удаленной от заделанных граней, распределение компонен-

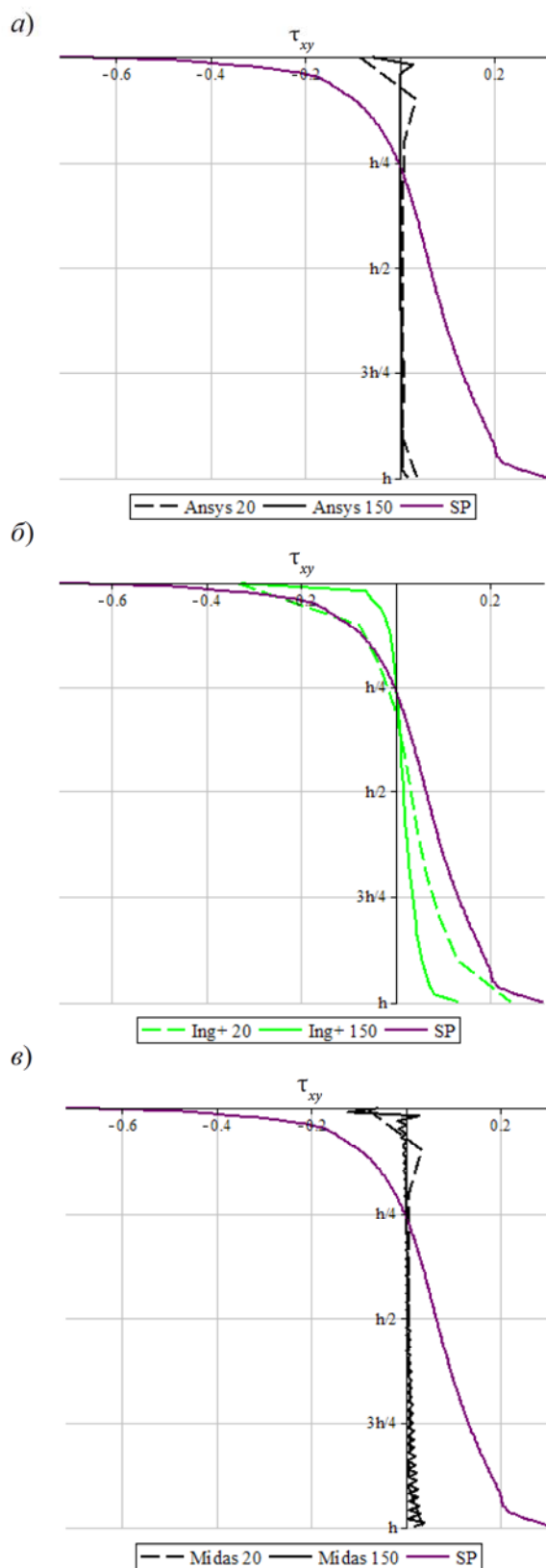


Рис. 8. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в угловой опорной вертикали ( $x = 0, y = 0$ ): а — ANSYS; б — Ing+; в — Midas

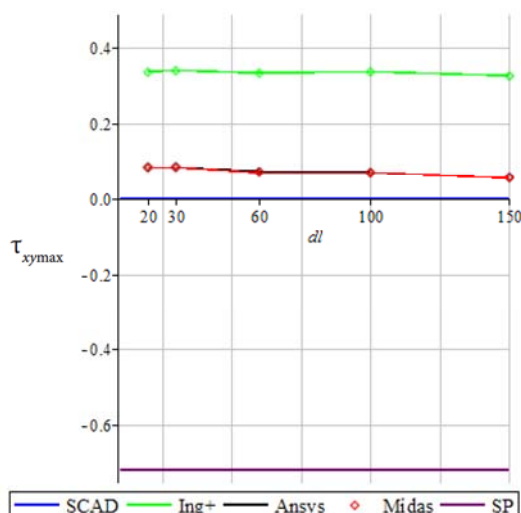


Рис. 9. График сходимости результатов по максимальному значению  $\tau_{xy}^*$  в угловой опорной вертикали ( $x=0$ ,  $y=0$ ) в зависимости от плотности разбиения сетки и вида конечных элементов

тов НДС с помощью МКЭ дает достоверные результаты. Как и следовало ожидать, напряжения сходятся несколько медленнее перемещений. Медленнее всех сходится решение на модели  $a$  в окрестностях верхней и нижней граней плиты, однако при измельчении сетки наблюдается сходимость и снижение относительной погрешности по сравнению с заданными граничными условиями.

Вблизи ребер плиты решения по напряжениям, очевидно, расходятся и не дают достоверного результата. Измельчение сетки приводит к тому, что область неверных значений уменьшается, но погрешность значений возрастает. Размер такой области приблизительно равен 1–2 характерным размерам КЭ. Большие расхождения от эталонного решения имеют касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , которые значительно отличаются от эталона.

#### Заключение

Решения, получаемые с помощью МКЭ, безусловно, дают достоверные результаты в основной области, удаленной от границ, хотя и сходятся с различной скоростью в зависимости от выбранного типа КЭ. Вследствие идеализации формы границы окрестность ребер плиты является областью с сингулярным распределением НДС [18, 19] и требует как особого решения в рамках самого МКЭ, например итерационной процедуры, предлагаемой в [20], так и развития альтернатив-

ных численно-аналитических методов [21, 22] и теоретико-экспериментальных [23]. Поэтому вопрос о значениях напряжений в окрестностях заделки остается открытым, а исследования НДС объемных тел — актуальными даже в рамках линейной ТУ.

#### Библиографический список

1. *Lame G.* Lecons sur la theorie mathematique de l'elasticite des corps solides. Paris: Mallet-Bachelier, 1852. 335 pp.
2. *Крушевский А. Е.* Введение в аналитическую механику упругих тел. Минск: БНТУ, 2004. 335 с.
3. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. 4-е изд., перераб. М.: СКАД СОФТ, 2011. 736 с.
4. *Городецкий А. С., Евзеров И. Д.* Компьютерные модели конструкций. М.: Издательство строительных вузов, 2009. 360 с.
5. *Федоров В. С., Граминовский Н. А.* Анализ сходимости результатов расчета некоторых программных комплексов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2007. № 1. С. 25–29.
6. Верификационный отчет по программному комплексу ЛИРА-САПР // [http://www.rflira.ru/i/Verification/LIRA-SAPR\\_Verification\\_vol-2.pdf](http://www.rflira.ru/i/Verification/LIRA-SAPR_Verification_vol-2.pdf).
7. *Ширунов Г. Н.* Точные решения задачи теории упругости для проверки практической сходимости конечно-элементных моделей // *Вестник гражданских инженеров*. 2013. № 6(41). С. 53–57.
8. Верификационный отчет по программному комплексу MicroFe // [http://www.tech-soft.ru/doc/otchet\\_16.pdf](http://www.tech-soft.ru/doc/otchet_16.pdf). М.: ТЕХСОФТ, 2009. С. 327.
9. Верификационный отчет по программному комплексу MIDAS GTS // <http://www.stadyo.ru/download/verification/midas>. М.: Подземпроект, 2012.
10. Верификационный отчет по программному комплексу ANSYS/Mechanical. Т. 2 // [http://stadyo.ru/download/verification/ansys\\_mechanical](http://stadyo.ru/download/verification/ansys_mechanical).
11. Толстая квадратная в плане плита, жестко защемленная по боковым граням, под действием равномерно распределенной по верхней грани нагрузки — SCAD // [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/58](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/58).
12. *Лисицын Б. М.* Расчет заземленных плит в постановке пространственной задачи теории упругости // *Прикладная механика*. 1970. 6. № 5. С. 18–23.
13. *Matrosov A. V., Shirunov G. N.* Numerical-Analytical Computer Modeling of a Clamped Isotropic Thick Plate // *Proceedings of International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), Russia, Saint-Petersburg, June 30 — July 4, 2014*. P. 110–111.



14. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Метод суперпозиции в решении задачи упругого изотропного параллелепипеда // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 77–90.

15. Галилеев С. М., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит // Прикладная механика. 1995. Т. 31. № 6. С. 64–71.

16. Матросов А. В. Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании // Вестник гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2011. № 2. С. 14а–21.

17. Румянцев А. В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: учеб. пособие. Калининград: Калинингр. ун-т, 1995. 170 с.

18. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. 2-е изд., испр. и доп. Ростов н/Д: ООО «ЦВВР», 2007. 114 с.

19. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.

20. Пестренин В. М., Пестренина И. В., Ландик Л. В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 78–87.

21. Голоскоков Д. П. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.

22. Ширунов Г. Н. Моделирование нормальной сосредоточенной силы в задаче линейно деформируемого основания гидротехнического сооружения // Вестник гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2015. № 1(29). С. 52–59.

23. Фриштер Л. Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния в вершине прямоугольного клина // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 57–62.

## References

1. Lamé G. *Lecons sur la theorie mathematique de l'elasticite des corps solides*. Paris, Mallet-Bachelier Publ., 1852, 335 p.

2. Krushevskiy A. E. *Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku uprugikh tel* [Introduction to analytical mechanics of elastic bodies]. Minsk, BNTU Publ., 2004, 335 p.

3. Perel'muter A. V., Slivker V. I. *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh analiza* [Simulation models of structures and possibility of analyzing them]. 4-th ed., revised. Moscow, SCAD SOFT Publ., 2011, 736 p.

4. Gorodetskiy A. S., Evzerov I. D. *Komp'yuternye modeli konstruksiy* [Computer models of designs]. Moscow, Publishing house of construction higherschools, 2009, 360 p.

5. Fedorov V. S., Graminovskiy N. A. *Analiz skhodimosti rezul'tatov rascheta nekotorykh programmnykh kompleksov* [Analysis of convergence of calculation results of some program complexes]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering designs and structures*, 2007, no. 1, pp. 25–29.

6. *Verifikatsionnyy otchet po programmnomu kompleksu LIRA-SAPR* [Verification report on the LIRA-SAPR program complex]. Available at: [http://www.rflira.ru/i/Verification/LIRA-SAPR\\_Verification\\_vol-2.pdf](http://www.rflira.ru/i/Verification/LIRA-SAPR_Verification_vol-2.pdf)

7. Shirunov G. N. *Tochnye resheniya zadachi teorii uprugosti dlya proverki prakticheskoy skhodimosti konechno-ehlementnykh modeley* [Exact solutions of the problem in the theory of elasticity for checking the practical convergence of finite element models]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 6(41), pp. 53–57.

8. *Verifikatsionnyy otchet po programmnomu kompleksu MicroFe* [Verification report on the MicroFe program complex]. Available at: [http://www.tech-soft.ru/doc/otchet\\_16.pdf](http://www.tech-soft.ru/doc/otchet_16.pdf). Moscow, TEKHSOFT Publ., 2009, p. 327.

9. *Verifikatsionnyy otchet po programmnomu kompleksu MIDAS GTS* [Verification report on the MIDAS GTS program complex]. Available at: <http://www.stadyo.ru/download/verification/midas>. Moscow, Podzemproekt Publ., 2012.

10. *Verifikatsionnyy otchet po programmnomu kompleksu ANSYS/Mechanical* [Verification report on the ANSYS/Mechanical program complex]. Available at: [http://stadyo.ru/download/verification/ansys\\_mechanical](http://stadyo.ru/download/verification/ansys_mechanical). Vol. 2.

11. *Tolstaya kvadratnaya v plane plita, zhestko zashchemlennaya po bokovym granyam, pod deystviem ravnomerno raspredelennoy po verkhney grani nagruzki* — SCAD [Thick square in plan plate rigidly jammed on side edges subjected to evenly distributed on the top side loading—SCAD]. Available at: [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/58](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/58).

12. Lisitsyn B. M. *Raschet zashchemlennykh plit v postanovkeprostranstvennoy zadachi teorii uprugosti* [Calculation of the clamped plates in the setting of spatial task of the elasticity theory]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, 1970, no. 5, pp. 18–23.

13. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate*. Proc. of Int. conf. on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). Russia, Saint-Petersburg, June 30 – July 4, 2014, pp. 110–111.

14. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Metod superpozitsii v reshenii zadachi uprugogo izotropnogo parallelepi-*

peda [The method of superposition in the solution of the problem of an elastic isotropic parallelepiped]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Bulletin of the Saint-Petersburg University. Ser. 10. Applied mathematics. Informatics. Management processes*, 2015, no. 2, pp. 77–90.

15. Galileev S. M., Matrosov A. V. *Metod nachal'nykh funktsiy v raschete sloistykh plit* [The method of initial functions in calculation of layered plates]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, 1995, Vol. 31, no. 6, pp. 64–71.

16. Matrosov A. V. *Chislenno-analiticheskiy raschet balok-stenok na lineynno-uprugom osnovanii* [Numerical and analytical calculation of beams walls on linearly — the elastic basis]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova – Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*, 2011, no. 2, pp. 14a–21.

17. Rumyantsev A. V. *Metod konechnykh ehlementov v zadachakh teploprovodnosti. Ucheb. posobie* [The method of finite elements in problems of heat conductivity. Teaching manual]. Kaliningrad, Kaliningrad State University Publ., 1995, 170 p.

18. Aleksandrov V. M., Chebakov M. I. *Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodeystviy* [Introduction to mechanics of contact interactions]. 2-nd ed., revised and added. Rostov-on-Don, OOO TsVVR Publ., 2007, 114 p.

19. Aksentyan O. K. *Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra* [Features of the intense deformed condition of the plate in the vicinity of the edge]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied mathematics and mechanics*, 1967, vol. 31, iss. 1, pp. 178–186.

20. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L. V. *Napryazhennoe sostoyanie vblizi osoboy toчки sostavnoy konstruksii v ploskoy zadache* [A tension state near a special point of a composite design in a flat task]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Bulletin of Tomsk state university. Mathematics and mechanics*, 2013, no. 4(24), pp. 78–87.

21. Goloskokov D. P. *Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshch'yu polinomov* [Modeling of the intense deformed condition of elastic bodies by means of polynoms]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova – Bulletin of the Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*, 2013, no.1, pp. 8–14.

22. Shirunov G. N. *Modelirovanie normal'noy sosredotochennoy sily v zadache lineynno deformiruemogo osnovaniya gidrotekhnicheskogo sooruzheniya* [Modeling of the normal concentrated force in the problem of linearly deformable basis of the hydraulic engineering construction]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova – Bulletin of the Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*, 2015, no.1 (29), pp. 52–59.

23. Frishter L. Yu. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v vershine pryamougol'nogo klina* [Analysis of the intense deformed state in top of a rectangular wedge]. *Vestnik MGSU – Bulletin of MGSU*, 2014, no. 5, pp. 57–62.