

УДК 624.072.14

© В. А. Кравчук, д-р техн. наук, профессор
(Тихоокеанский государственный университет,
Хабаровск, Россия)

E-mail: 000415@pnu.edu.ru

© Е. В. Кравчук, старший преподаватель
(Дальневосточный государственный университет,
Хабаровск, Россия)

E-mail: 004938@pnu.edu.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2022-19-6-10-20

© V. A. Kravchuk, Dr. Sci. Tech., Professor
(Pacific National University,
Khabarovsk, Russia)

E-mail: 000415@pnu.edu.ru

© E. V. Kravchuk, senior teacher
(Far Eastern State Transport University,
Khabarovsk, Russia)

E-mail: 004938@pnu.edu.ru

РАБОТА ТОНКОСТЕННЫХ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВЫТЯЖКОЙ СТЕНКИ, ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

OPERATION OF THIN-WALLED STEEL RODS PRE-STRESSED BY THE WALL TENSION UNDER RANDOM DYNAMIC INFLUENCES

Описан способ предварительного напряжения тонкостенных балок асимметричного поперечного сечения. Установлены параметры напряженного и деформированного состояния стержней. Энергетическим методом посредством сравнения кинетической и потенциальной энергий составных стержней определены круговая частота, угловая скорость обычных и предварительно напряженных балок при нагружении их единичной нагрузкой. Изучено напряженное и деформированное состояние обычных и предварительно напряженных стальных балок при внезапном единичном повороте сечения опорного узла. Установлено, что предварительное напряжение не оказывает влияние на напряженное и деформированное состояние опорных узлов. Максимальное влияние предварительного напряжения установлено в зоне максимального момента от внешней нагрузки. Несущая способность балок меняется незначительно при внезапном единичном повороте опорных узлов.

Ключевые слова: предварительное напряжение, круговая частота, угловая скорость, единичный поворот сечения, свободные колебания балок.

A method for prestressing thin-walled beams with an asymmetric cross section is described. The parameters of the stressed and strained state of the rods are established. By comparing the kinetic and potential energies of composite rods, the circular frequency and angular velocity of conventional and pre-stressed beams when loaded with a single load are determined using the energy method. Stressed and deformed state of ordinary and pre-stressed steel beams under sudden single rotation of the section of the support node has been investigated. It has been established that pre-stressing does not affect the stressed and strained state of the support nodes. The maximum influence of the pre-stressing is set in the area of the maximum moment from the external load. The bearing capacity of the beams changes insignificantly with a sudden single rotation of the support nodes.

Keywords: pre-stressing, circular frequency, angular velocity, unit rotation of the section, free oscillations of beams.

Введение

К случайным воздействиям на конструкции или сооружения из них можно отнести сейсмические, взрывные или техногенные, возникающие мгновенно и вызывающие динамические колебания и перемещения, сопровождающиеся изменением в конструкциях напряженно-деформированного состояния.

По данным Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта Российской академии наук (РАН), вся территория России и сопредельные с ней — Монголия, Китай, Япония, а также европейские страны в различной степени подвержены динамическим воздействиям. Самой высокой сейсмичностью в Европейской части России характеризуется Северный Кавказ, в Сибири —

Алтай, Саяны, Байкал и Забайкалье, на Дальнем Востоке — Курило-Камчатский район и остров Сахалин. Очень высокая сейсмичность наблюдается в Японии.

По этой причине головные научно-исследовательские институты России, Японии, Китая, европейских и других стран, занимающиеся проектированием зданий и сооружений, ведут активную исследовательскую и практическую работу по созданию надежных конструкций и сооружений, выдерживающих статические, динамические и случайные сейсмические нагрузки. Каждая страна имеет нормативные, обязательные для исполнения документы, регламентирующие проектирование, изготовление и монтаж конструкций, работающих в условиях сейсмических, взрывных или других динамических нагрузок. Не прекращается работа, связанная с поиском резервов несущей способности имеющихся строительных материалов и уточнением методик расчета конструкций, эксплуатируемых в экстремальных условиях, в частности в условиях сейсмических воздействий.

В июне 2018 г. в Греции (г. Салоники) прошли 16-я Европейская конференция по сейсмостойкому строительству и Генеральная ассамблея Европейской ассоциации по сейсмостойкому строительству, на которых обсуждены основные направления и итоги практической реализации достижений в области сейсмостойкого строительства [1]. Проблемы строительства зданий и сооружений в сейсмоопасных районах Монголии изложены в работе [3]. Ученые многих стран детально изучают динамические параметры несущей способности основных элементов металлических каркасов зданий и инженерных сооружений. В статье [2] приведены результаты исследований предварительно напряженных стальных балок. Теория определения частоты собственных колебаний пролетных строений изложена в работе [4]. Экспериментальные исследования упругих колебаний сооружений, замеренные станциями GPS, представлены в публикации [5]. Динамический мониторинг строительных конструкций изложен в работе [6]. Определение технического состояния пролетных конструкций по критерию собственных колебаний представлено в статье [7]. Анализ хрупкости материала мостовой системы по критерию сейсмической прочности описан

в статье [8]. Методологические основы проектирования сейсмостойких стенок стальных балок из специальной листовой стали представлены в работе [9]. Требуемые пластичность и прочность металлических безреберных элементов каркасов зданий описаны в статье [10]. Оценка работоспособности стенок стальных балок при случайных взрывных нагрузках выполнена в работе [11]. Сейсмические характеристики стенки стальной балки в зоне максимальных касательных напряжений описаны в статьях [12, 13]. Экспериментальное и численное исследование работы жестких подкрепленных пластин при сейсмических воздействиях представлено в исследовании [14]. Свободные колебания балок Тимошенко, имеющих трещины, представлены работой [15]. Основная частота балок с трещинами при изгибных колебаниях изучена в работе [16]. Аналитические прогнозы собственных частот свободно опертых балок с дефектами представлены в работе [17]. Анализ свободных и вынужденных колебаний многопролетных неразрезных балок на основе метода динамической жесткости представлен в статье [18]. Ведутся работы по исследованию прогрессивных, предварительно напряженных без затяжек стальных балок, повышающих несущую способность при одновременном снижении массы конструкций [19].

Ученые, занимающиеся исследованием предварительно напряженных стальных конструкций, пришли к выводу о том, что помимо увеличения несущей способности такие конструкции позволяют также снизить их массу. Проведенные в 1963 г. (Дрезден), 1966 г. (Чехословакия) и 1971 г. (Ленинград) I, II и III международные конференции убедительно это доказали.

Учитывая, что снижение массы металлического каркаса зданий и сооружений существенно улучшает их динамические параметры, можно ожидать, что поиск резервов несущей способности предварительно напряженных конструкций позволит решить основную задачу строительства — повышение динамической прочности и устойчивости зданий при одновременном снижении их массы и стоимости.

Предмет исследования — напряженное и деформированное состояние стальных стержней при воздействии на них случайных динамических воздействий.

Объект исследования — стальная тонкостенная балка, предварительно напряженная вытяжкой ее стенки.

1. Метод исследования

Решение поставленной задачи базируется на применении метода предельного состояния конструкции, согласно которому внешняя нагрузка, приложенная к конструкции, должна быть меньше или равна ее несущей способности, а также энергетического метода, который предусматривает выполнение закона сохранения энергии, при котором сумма потенциальной и кинетической энергии равна некоторой константе.

2. Способ предварительного напряжения и характеристика напряженно-деформированного состояния балок

Процедура заключается в продольной вытяжке тонкой стенки балок (гибкость $\lambda = h_w / t_w \geq 200$) до напряжений, равных расчетному сопротивлению малоуглеродистой стали R_y , с последующим присоединением стенки в напряженном состоянии к анкерному «верхнему» поясу балки, снятием усилий предварительного напряжения в ней и присоединением «нижнего» поясного листа.

На стадии изготовления балка изгибается моментом усилий предварительного напряжения

$$M_0 = \frac{R_y AhK^2}{(1+K)^2(K+1)} \quad (1)$$

и получает выгиб

$$y_{M_0} = \frac{M_0 l^2}{8,3EI_x} \quad (2)$$

Здесь A — площадь поперечного сечения; h — высота балки; K — коэффициент асимметрии, $K = 1,175$; l — пролет балки; EI_x — изгибная жесткость конструкции.

В процессе эксплуатации максимальные напряжения в поясных листах не превосходят расчетного сопротивления высокопрочной стали, а в верхней зоне стенки — расчетного сопротивления малоуглеродистой стали.

Местная устойчивость стенки в зоне максимальных сжимающих напряжений повышена в пять раз по сравнению с аналогичным показателем обычной балки [19].

3. Круговая частота обычных и предварительно напряженных балок, жестко закрепленных на опорах при единичных нагрузках

Задача решается на основе метода равенства потенциальной и кинетической энергий, известного из работ И. М. Рабиновича [20]:

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{\sum M^2 dx}{EI_x}}{\int \sum y^2 \mu dx} \quad (3)$$

Здесь μ — погонная масса балки и нагрузки на ней.

Момент внешних нагрузок в балке, жестко закрепленной в опорных узлах и нагруженной усилием $P = 1,0$,

$$\sum M = \frac{Px}{2} - M_{op} = \frac{Px}{2} - \frac{Pl}{8} \quad (4)$$

Суммарный прогиб

$$\sum y = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2 x}{16} \right) - \frac{Pl}{16} (l^2 - lx) \quad (5)$$

Выполняя соответствующие преобразования, устанавливаем, что круговая частота обычной балки

$$\omega^p = \frac{4,5}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} \quad (6)$$

Решая задачу поиска круговой частоты предварительно напряженной балки, следует учитывать, что на стадии ее изготовления балка получает выгиб y_{M_0} и нагружена моментом усилий предварительного напряжения M_0 , вектор которых направлен в сторону, противоположную вектору внешних нагрузок.

Поиск опорных моментов в предварительно напряженной балке с жесткими опорами следует выполнять из условия равенства нулю поворотов сечения на опоре.

Поскольку на стадии изготовления балка находится в зоне чистого изгиба, вызванного моментом предварительного напряжения M_0 , то поворот сечения опорных узлов

$$\theta_{M_0} = -M_0 l / 2 \quad (7)$$

Поворот концевых участков балки от единичного нагружения

$$\theta_p = \frac{Pl^2}{16} \quad (8)$$

Поворот указанных участков от чистого изгиба опорным моментом

$$\theta_{M_{op.g}} = -\frac{M_{op.g} l}{2} \quad (9)$$

Из равенства $-\frac{M_0 l}{2} + \frac{Pl^2}{16} - \frac{M_{op.g} l}{2} = 0$ находим, что

$$M_{op.g} = \frac{Pl}{8} - M_0. \quad (10)$$

Суммарный момент внешних воздействий

$$\begin{aligned} \sum M &= M_p - M_0 - M_{op.g} = \\ &= \frac{Px}{2} - M_0 - M_{op.g} = \\ &= \frac{Px}{2} - M_0 - \left(\frac{Pl}{8} - M_0\right) = \frac{Px}{2} - \frac{Pl}{8}. \end{aligned} \quad (11)$$

Заменяя узловые защемления на опорные моменты $M_{op.g}$ в шарнирно закрепленных балках и используя известные аналитические зависимости, характеризующие прогибы в указанных балках от единичного усилия $P=1,0$, опорного момента $M_{op.g}$ и момента усилий предварительного напряжения M_0 , суммарный прогиб записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum y &= y_p - y_{M_0} - y_{M_{op.g}} = \\ &= -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2x}{16} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_{op.g}}{2} (l^2 - lx) - \frac{M_0}{2} (l^2 - lx) \right] = \\ &= -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2x}{16} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_{op.g}}{2} (l^2 - lx) - \frac{M_0}{2} (l^2 - lx) \right] = \\ &= -\frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2x}{16} \right) - \frac{Pl}{16} (l^2 - lx) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Возведем в квадрат и проинтегрируем выражения (11) и (12). Отсюда круговую частоту ω_{pg} предварительно напряженных балок, жестко закрепленных в опорных узлах, можно записать формулой

$$\omega_{pg} = \frac{1,054}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}. \quad (13)$$

4. Вынужденные смещения опор системы

Рассматривается предварительно напряженная балка с одной степенью свободы (рис. 1, а), левый конец защемления которой поворачивается по закону $\Delta(t) = \varphi \sin \theta t$. Ставится задача установить движение массы m заданной системы. Основа теоретического обоснования задачи подробно представлена в работах И. М. Рабиновича [20] и В. А. Киселева [21]. Обозначим через $\delta_{m\Delta}$ перемещение массы m от заданного смещения опоры $\Delta=1$, считая его статическим, при котором сила инерции массы отсутствует (рис. 1, б).

Дифференциальное уравнение движения массы запишем по принципу сложения перемещений от действующих на систему сил и перемещений опор:

$$y = \delta_{m\Delta} \Delta(t) + \delta_{11} (-m\ddot{y} - \beta y')$$

или

$$\ddot{y} + 2\alpha y' + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{m\Delta} \Delta(t) = F_1(t), \quad (14)$$

где $2\alpha = \beta / m$ — коэффициент, характеризующий степень влияния сил сопротивления на свободные колебания; m — масса элемента; β — коэффициент пропорциональности,

$$\beta = 2\alpha m = \frac{2\delta m \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi}. \quad (15)$$

Преобразование выражения (15) позволяет установить, что

$$\alpha = \frac{\delta \omega}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \quad (16)$$

где ω — круговая частота при условии отсутствия сил сопротивления:

$$\omega^2 = 1 / m \delta_{11}; \quad (17)$$

δ — логарифмический декремент затухания колебаний (по п. 11.1.10 СНиП 2.01.07-85 (СП 20.13330) «Нагрузки и воздействия» $\delta = 0,15$); δ_{11} — единичное перемещение опор.

Круговая частота колебаний стержня с учетом сил сопротивления

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}. \quad (18)$$

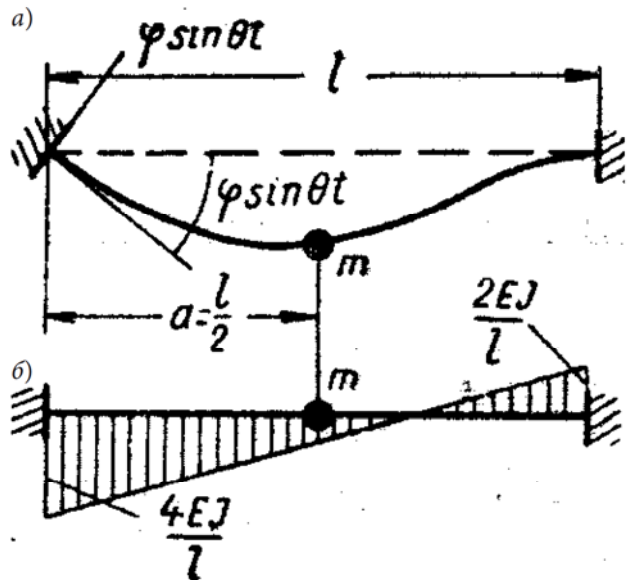


Рис. 1. Расчетная схема: а — статическое перемещение $\delta_{m\Delta}$ массы m от смещения опоры $\Delta=1,0$; б — то же, перемещение динамическое

С учетом значений логарифмического декремента затухания колебаний $\delta = 0,15$ коэффициент влияния сил сопротивления

$$\alpha = \frac{0,15\omega}{\sqrt{4 \cdot 3,14^2 + 0,15^2}} = 0,0238785\omega. \quad (19)$$

Принимая во внимание зависимость (19), круговая частота обычных балок:

- жестко закрепленных на опорах:

$$\omega_p = 0,0238785 \frac{4,5}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{0,10745}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}; \quad (20)$$

- предварительно напряженных с жесткими опорами:

$$\omega_{pg} = 0,0238785 \frac{1,054}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{0,025}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}. \quad (21)$$

Здесь l — длина балки; EI_x — изгибная жесткость элемента; μ — погонная масса балки и нагрузки на ней, кг/см.

Решение уравнения движения массы m при случайных на нее воздействиях:

$$y = y_{св} + \int_0^l \omega^2 \delta_{m\Delta} \Delta(u) e^{-\alpha(t-u)} \frac{\sin \omega_1(t-u)}{\omega_1} du. \quad (22)$$

Здесь $y_{св}$ — перемещения массы без учета сопротивления; u — горизонтальная составляющая перемещения массы.

В том случае, когда элемент имеет свободные колебания,

$$y = y(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t + \int_0^l \omega \delta_{m\Delta} \Delta(u) \sin \omega(t-u) du. \quad (23)$$

Если смещение опоры $\Delta(t) = \Delta_1 \sin ot + \Delta_2 \cos ot$ (Δ_1 и Δ_2 — перемещения одного направления), дифференциальное уравнение движения массы m :

$$\ddot{y} + 2\alpha y' + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{m\Delta} (\Delta_1 \sin ot + \Delta_2 \cos ot), \quad (24)$$

где o — угловая скорость движения массы m .

В работе [2] угловая скорость o определяется из зависимости

$$\operatorname{tg} \lambda = 2\alpha o / (\omega^2 - o^2), \quad (25)$$

решение которой позволяет получить квадратное уравнение

$$o^2 \operatorname{tg} \lambda + o 2\alpha - \operatorname{tg} \lambda \omega^2 = 0, \quad (26)$$

из которого следует

$$o = -B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}, \text{ рад/с}, \quad (27)$$

где $A = \operatorname{tg} \lambda$; $B = 2\alpha$; $C = \operatorname{tg} \lambda \omega^2$.

Коэффициент $\lambda = 2\alpha / \omega$ — отвлеченная величина, учитывающая силы сопротивления движению массы m .

При расчете через $\Delta \sin ot$ и начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = v(0) = 0$ уравнение движения массы m :

$$y = \frac{\delta_{m\Delta} \Delta}{\sqrt{(1 - \frac{o^2}{\omega^2})^2 + \gamma^2 \frac{o^2}{\omega^2}}} \times \times [\sin(ot - \lambda) + e^{-\alpha t} (\sin \lambda \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \sin \lambda - o \cos \lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t)]. \quad (28)$$

При расчете через $\Delta \cos ot$:

$$y = \frac{\delta_{m\Delta} \Delta}{\sqrt{(1 - \frac{o^2}{\omega^2})^2 + \gamma^2 \frac{o^2}{\omega^2}}} \times \times [\cos(ot - \lambda) - e^{-\alpha t} (\cos \lambda \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cos \lambda + o \sin \lambda}{\omega_1} \sin \omega_1 t)]. \quad (29)$$

Для установившихся колебаний выражения (28), (29) приобретают вид:

$$y = \delta_{m\Delta} \Delta \sin(ot - \lambda) / (\sqrt{(1 - \frac{o^2}{\omega^2})^2 + \gamma^2 \frac{o^2}{\omega^2}}); \quad (30)$$

$$y = \delta_{m\Delta} \Delta \cos(ot - \lambda) / (1 - \frac{o^2}{\omega^2})^2 + \gamma^2 \frac{o^2}{\omega^2}. \quad (31)$$

Уравнения (28), (29) без учета сопротивления при малом t :

$$y = \frac{\delta_{m\Delta} \Delta}{(1 - \frac{o^2}{\omega^2})} (\sin ot - \frac{o}{\omega} \sin \omega t); \quad (32)$$

$$y = \frac{\delta_{m\Delta} \Delta}{(1 - \frac{o^2}{\omega^2})} (\cos ot - \frac{o}{\omega} \cos \omega t). \quad (33)$$

Инерционная сила при установившихся колебаниях

$$I^* = m o^2 y. \quad (34)$$

5. Реализация теоретических положений расчета предварительно напряженных балок

Проанализируем графики изгибающих моментов в обычных и предварительно напряженных балках с жесткими опорами и сосредоточенной массой m посередине пролета при установившихся колебаниях, если левое защемление поворачивается по закону $\Delta(t) = \varphi \sin ot$ с учетом соотношений угловой скорости к круговой ча-

стоте (σ^2 / ω^2) для сопоставляемых балок без учета сил сопротивления.

Опорные моменты M обычных балок в жестких узлах будем находить на основе принципа независимости действия сил, применяя для этого дифференциальное уравнение изогнутой оси балок, полагая при этом, что в жестких узлах повороты сечений отсутствуют.

Расчленим сопоставляемые балки на отдельные элементы с шарнирным закреплением опорных узлов (рис. 2).

Поворот опорных узлов от сосредоточенной массы $m = 1,0$

$$\theta_1 = \frac{l^2}{16EI_x}. \quad (35)$$

Суммарный поворот сечения от опорных моментов M

$$\sum \theta = \theta_2 + \theta_3 = -\frac{Ml}{3EI_x} - \frac{Ml}{6EI_x} = -\frac{Ml}{2EI_x}. \quad (36)$$

Суммируя выражения (35) и (36), находим, что опорные моменты в балках, жестко закрепленных в опорных узлах, находящихся под воздействием сосредоточенной массы $m = 1,0$,

$$M = l/8, \text{ кН} \cdot \text{см}. \quad (37)$$

График результирующего момента в балке с жесткими опорными узлами от массы $m = 1,0$ представлен на рис. 3, в.

«Перемножение» эпюр рис. 3, а и 3, в позволяет определить единичное перемещение балок δ_{11} :

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{1}{EI_x} = \frac{l^3}{192EI_x}. \quad (38)$$

Статическая эпюра моментов от поворота левого заземления на угол $\varphi = 1,0$ (см. рис. 1) по-

строена на основе предположения о том, что поворот сечений опорных узлов в этом случае $\theta^1 = \frac{Ml}{2EI_x}$. Суммируя полученное выражение поворота сечения с вынужденным поворотом $\varphi = 1,0$, получим $\frac{Ml}{4} + 1,0 = 0$.

Отсюда следует момент на левой опоре

$$M_{\text{л}} = -4EI_x / l; \quad (39)$$

на правой опоре

$$M_{\text{пр}} = 2EI_x / l. \quad (40)$$

Грузовое перемещение $\delta_{m\Delta}$ также определяется «перемножением» эпюр моментов рис. 4, а и 4, б:

$$\delta_{m\Delta} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{EI_x}{l} \frac{1}{EI_x} = \frac{l}{8}. \quad (41)$$

Уравнение движения массы определяется по зависимости (32)

$$y = \frac{1}{8} \varphi \sin \omega t / (1 - \frac{\sigma^2}{\omega^2}). \quad (42)$$

Выполняя сопоставительный анализ параметров обычной и предварительно напряженной балок, угловую скорость ω определяем по зависимости

$$\omega = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 + 4 \text{tg} \lambda \cdot \text{tg} \lambda \omega^2}}{2 \text{tg} \lambda}. \quad (43)$$

Коэффициент α , характеризующий влияние сил сопротивления на свободные колебания обычных балок,

$$\alpha_{ob} = 0,0238785 \omega_p.$$

Круговая частота обычных балок

$$\omega_{ob} = \frac{4,5}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}. \quad (44)$$

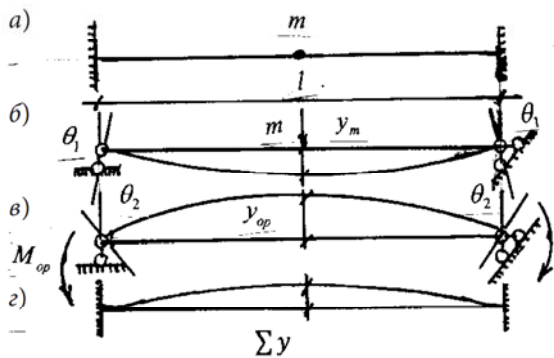


Рис. 2. Поворот поперечного сечения: а — исходная расчетная схема балки; б — поворот опорного узла от воздействия сосредоточенной массы m в середине балки; в — то же, от момента на опорах; г — суммарный прогиб

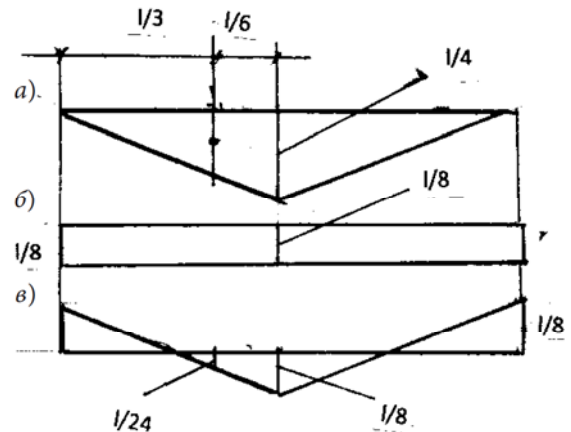


Рис. 3. Эпюры моментов: а — момент от сосредоточенной массы $m = 1,0$; б — опорный момент; в — эпюра суммарного момента внешних нагрузок

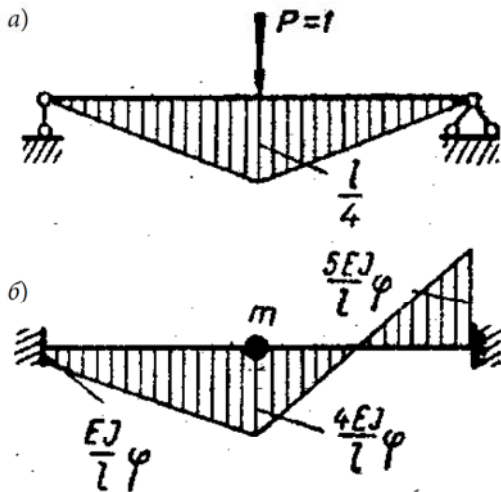


Рис. 4. Схема для определения коэффициента $\delta_{m\Delta}$: а — эпюра изгибающего момента от единичного нагружения $P = 1$; б — эпюра изгибающих моментов с учетом $\varphi = 1$

Для решения задачи предположим, что сопоставляются балки пролетом $l = 12\ 000$ мм, имеющие одинаковые параметры несущей способности: $I_x = 40\ 979\ \text{см}^4$; $E = 2\ 100\ 000\ \text{кг/см}^2$; погонный вес $\mu = 0,43\ \text{кН/см}$.

В таком случае

$$\omega_p = \frac{4,5}{1200^2} \sqrt{\frac{40\ 979 \cdot 2\ 100\ 000}{0,43}} = 1,38\ \text{с}^{-1};$$

$$\alpha_p = 0,0238785 \cdot 1,38 = 0,03295;$$

$$\lambda_p = 2\alpha_{ob} / \omega_{ob} = 2 \cdot 0,03295 / 1,38 = 0,0477;$$

$$\text{tg } \lambda = \text{tg } 0,0477 = 0,0477362;$$

$$\text{tg } \lambda \omega_p^2 = 0,0477362 \cdot 1,38^2 = 0,09.$$

Следовательно, угловая скорость обычной балки

$$\omega_p = \frac{-2 \cdot 0,03295 \pm \sqrt{(2 \cdot 0,03295)^2 + 4 \cdot 0,0477 \cdot 0,09}}{2 \cdot 0,0477362} = 0,832\ \text{рад.} \quad (45)$$

Выполняя ту же процедуру относительно предварительно напряженной балки с жесткими опорами, находим

$$\omega_{pg} = \frac{1,054}{1200^2} \sqrt{\frac{40\ 979 \cdot 2\ 100\ 000}{0,43}} = 0,32464\ \text{с}^{-1};$$

$$\alpha_{pg} = 0,0238785 \cdot 0,32464 = 0,007752;$$

$$\lambda_{pg} = 2 \cdot 0,007752 / 0,32454 = 0,04777;$$

$$\text{tg } \lambda_{pg} = 0,0478;$$

$$\text{tg } \lambda \omega_{pg}^2 = 0,0478 \cdot 0,32464^2 = 0,005.$$

Угловая скорость предварительно напряженной балки с жесткими опорами

$$\omega_{pg} = \frac{-2 \cdot 0,007752 \pm \sqrt{(2 \cdot 0,007752)^2 + 4 \cdot 0,04777 \cdot 0,09}}{2 \cdot 0,04777} = 0,1996\ \text{рад.} \quad (46)$$

Соотношение квадратов угловой скорости и круговой частоты обычных и предварительно напряженных балок

$$\psi_p = \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2} = \frac{0,832^2}{1,38^2} = 0,363;$$

$$\psi_{pg} = \frac{0,1996^2}{0,3246^2} = 0,378.$$

Поскольку ψ_p и ψ_{pg} практически равны между собой, то и уравнение движения массы m для обычных и предварительно напряженных балок также будет одинаковым:

$$y = \frac{l}{8} \varphi \sin \omega t / (1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}) = \frac{l \cdot \varphi \sin \omega t}{6,62}. \quad (47)$$

Частоту свободных колебаний запишем в виде

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{192EI_x}{ml^3}. \quad (48)$$

В формуле (48) δ_{11} — перемещение обычной балки от единичного нагружения ее внешними силами. Указанный параметр находится «перемножением» эпюры момента от усилия $P = 1,0$ (см. рис. 3, а) и эпюры суммарного момента усилия нагрузок в балке, жестко закрепленной на опорах (см. рис. 3, в):

$$\delta_{11} = \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{4} \frac{l}{24} \frac{1}{EI_x} \cdot 2 = \frac{l^3}{192EI_x}. \quad (49)$$

Выражение (49) позволяет движущуюся массу m записать как

$$m = 192EI_x / (\omega^2 l^3). \quad (50)$$

Подставляя в выражение (50) круговую частоту обычной балки, жестко закрепленной в опорах, по зависимости (6) находим, что

$$m_p = \frac{192 \cdot EI_x}{l^3 \left(\frac{4,5}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} \right)^2} = 9,48\mu l. \quad (51)$$

Следуя методике, изложенной в работе В. А. Киселева, инерционная сила обычной балки

$$I^* = m\omega_p^2 \frac{l}{8} \varphi \sin \omega t / (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2}) =$$

$$= 9,48\mu l \cdot 0,832^2 \frac{l \cdot \varphi \sin ot}{8 \cdot 0,622} =$$

$$= 1,31878688 \cdot \mu l^2 \cdot \varphi \sin ot = 1,3188\mu l^2 \cdot \varphi \sin ot. \quad (52)$$

В зависимости (52) принято, что угловая скорость обычной балки ω_p принята по формуле (45).

Момент в левом защемлении

$$M_{x=0} = \frac{4EI}{l} \varphi \sin ot - \frac{I^* l}{8} =$$

$$= \varphi \sin ot \left(\frac{4EI_x}{l} - 1,31878688 \frac{\mu l^3}{8} \right) =$$

$$= \varphi \sin ot \left(\frac{4EI_x}{l} - 0,16\mu l^3 \right). \quad (53)$$

Изгибающий момент посредине пролета

$$M_{x=l/2} = \frac{EI_x}{l} \varphi \sin ot \frac{1 + 2 \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2}} = 2,73 \frac{4EI_x}{l} \varphi \sin ot. \quad (54)$$

Момент в правом защемлении

$$M_{x=l} = -\frac{2EI_x}{l} \varphi \sin ot - \frac{I^* l}{8} =$$

$$= -\varphi \sin ot \left(\frac{2EI_x}{l} + 1,31878688 \frac{\mu l^3}{8} \right) =$$

$$= -\varphi \sin ot \left(\frac{2EI_x}{l} - 0,16\mu l^3 \right). \quad (55)$$

С целью проведения сопоставительного анализа рассмотрим динамические параметры и напряженное состояние предварительно напряженных балок, имеющих геометрические размеры и параметры, одинаковые с обычными балками.

Опорный момент и момент в середине балки от внешних единичных нагрузок представлены выражениями (10) и (11).

Выше (1) установлено, что момент усилий предварительного напряжения M_0 определяется по формуле

$$M_0 = \frac{R_y AhK^2}{(1+K)^2(K+2)}, \quad (56)$$

где R_y — расчетное сопротивление материала стенки балки, $R_y = 2300$ кг/см²; A — площадь поперечного сечения балки, $A = 51,9$ см²; h — высота балки, $h = 69$ см; K — коэффициент асимметрии сечения балки, $K = 1,175$.

Следовательно,

$$M_0 = \frac{2300 \cdot 51,9 \cdot 69 \cdot 1,1754^2}{2,2154^2 \cdot 3,1754} = 757\,108,333 \text{ кг} \cdot \text{см}. \quad (57)$$

Заметим, что вектор момента усилий предварительного напряжения противоположно направлен вектору моментов внешних нагрузок. В работе [19] установлено, что на расстоянии 0,1l от торцов балок усилия предварительного напряжения отсутствуют и, следовательно, влияние M_0 на численные значения опорного момента учитывать не следует. Что же касается напряженного состояния ПНБ в середине пролета, то M_0 будет оказывать существенное влияние.

На том основании, что предварительное напряжение не оказывает влияния на величину опорного момента в указанных балках и он определяется выражением (10), единичное перемещение $\delta_{11.g}$ предварительно напряженной балки останется равным соответствующему перемещению обычной балки, т. е. $\delta_{11.g} = l^3 / 192EI_x$.

Движущую массу ПНБ следует определять с учетом круговой частоты этой балки:

$$m_g = \frac{192EI_x}{(1,054 \frac{l^2}{\mu} \sqrt{EI_x})^2} \frac{1}{l^3} = 172,83\mu l. \quad (58)$$

Инерционная сила ПНБ

$$I_g^* = m_g \omega_g^2 \frac{l}{8} \sin ot \frac{1}{(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega_g^2})} =$$

$$= 172\mu l \cdot 0,1996^2 \cdot 0,125l \cdot \varphi \sin ot \frac{1}{0,378} =$$

$$= 1,384\mu l^2 \cdot \varphi \sin ot. \quad (59)$$

Момент в левом защемлении

$$M_{g(x=0)} = \frac{4EI_x}{l} \varphi \sin ot - \frac{I_g^* l}{8} =$$

$$= \varphi \sin ot \left(\frac{4EI_x}{l} - 1,384\mu l^2 \right). \quad (60)$$

Момент в середине балки

$$M_{g(x=l/2)} = \frac{EI_x}{l} \varphi \sin ot \frac{1 + 2 \frac{\omega_g^2}{\omega_g^2}}{1 - \frac{\omega_g^2}{\omega_g^2}} - M_0 =$$

$$= 2,82 \frac{EI_x}{l} \varphi \sin ot - M_0. \quad (61)$$

Момент в правом защемлении

$$M_{g(x=l)} = \varphi \sin ot \left(\frac{2EI_x}{l} - 1,384\mu l^2 \right). \quad (62)$$

С учетом фактического момента усилий предварительного напряжения максимальный момент

$$M_{g(x=l/2)} = (2,82 \frac{EI_x}{l} \varphi \sin \omega t - 757 \cdot 108) \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Углу поворота $\varphi = 1,0$, как следует из рис. 3, соответствует зависимость $\varphi = \frac{Ml}{4EI_x}$.

В таком случае

$$M_{g(x=l/2)} = 2,82 \frac{1}{4} \frac{l}{8} \sin \omega t - 757 \cdot 108. \quad (63)$$

Подставляя в (63) угловую скорость предварительно напряженных балок по зависимости (46) и допуская, что случайное воздействие в виде поворота сечения на угол φ происходит в течение $t = 10$ с ($\sin \omega t = 0,975$), приходим к выводу о том, что первое слагаемое зависимости (63) ничтожно мало по сравнению с моментом усилий предварительного напряжения M_0 и, следовательно, только предварительное напряжение балок будет играть решающую роль при оценке напряженного состояния конструкции.

Выводы

1. Соотношение круговой частоты ω и угловой скорости ω обычных и предварительно напряженных балок — величина одинаковая для сопоставляемых стержней.

2. Распределение предварительных напряжений по длине балок такое, что на расстоянии $0,1l$ (где l — длина балки) эти напряжения отсутствуют, поэтому не оказывают влияния на напряженное состояние жестких узлов конструкций.

3. Максимальный момент внешних нагрузок мало зависит от поворота опорных узлов балок на угол $\varphi = 1,0$. Решающее влияние на напряженное состояние конструкций в этом месте играет предварительное напряжение.

4. Напряженное состояние конструкции, вызванное случайным внешним воздействием в виде поворота сечения на угол $\varphi = 1,0$, — величина ничтожно малая по сравнению с напряжением от внешней нагрузки. Решающее влияние на напряженно-деформированное состояние балок оказывает предварительное напряжение стержней.

5. Случайный поворот сечения балок на угол $\varphi = 1,0$ незначительно изменяет величину моментов внешних нагрузок и напряженное состояние конструкции.

6. Напряжения в опорных узлах обычных и предварительно напряженных балок равны между собой.

Библиографический список

1. Смирнова Л. Н. 16 Европейская конференция по сейсмостойкому строительству // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. № 3. С. 9–12.

2. Кравчук В. А. Динамические параметры несущей способности стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой тонкой стенки при жестком закреплении их на опорах // Вестник гражданских инженеров. 2021. № 89 (6). С. 72–78. DOI: 10.23968/1999-5571-2021-18-6-72-78.

3. Цэрэндорж Б., Гончиг Б. Из истории развития строительства высотных зданий в Монголии и методика динамического метода расчета прочности многоэтажных каркасных зданий // Вестник ВСГУТУ. 2011. № 2 (33). С. 35–42.

4. Sychova A. M., Zarin S. V., Matskevich A. V. Theory of determining the frequency of natural oscillations of span structures // Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 98 (6). Article No. 9803. DOI: 10.18720/MCE.98.

5. Gatti M. Elastic period of vibration calculated experimentally in buildings hosting permanent GPS stations // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2018. Vol. 17. No. 3. Pp. 607–625.

6. Савин С. Н. Динамический мониторинг строительных конструкций на примере пандуса киноконцертного зала «Пушкинский» в г. Москва // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 7 (33). С. 58–62.

7. Сычева А. М., Зарин С. В., Мацкевич А. В., Алишичев С. Е., Абу-Хасан М. С. Определение технического состояния пролетных конструкций по частоте собственных колебаний // Транспортное строительство. 2019. № 3. С. 25–28.

8. Song S., Qian Y., Liu J., Xie X., Wu G. Time-variant fragility analysis of the bridge system considering time-varying dependence among typical component seismic demands // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2019. Vol. 18. Issue 2. Pp. 363–377.

9. Ebadi P., Farajloomanesh S. Seismic design philosophy of special steel plate shear walls // Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 3 (95). Pp. 3–18. DOI: 10.18720/MCE.95.

10. Ebadi P., Farajloomanesh S., Pishbin M. Required ductility and capacity for designing steel buildings with special steel shear wall system without stiffener // The II International Conference on Architecture, Civil

Engineering and Urban Planning of the 3rd Millennium. Tehran, Iran, 2014.

11. Moghimi H., Driver R. G. Performance assessment of steel plate shear walls under accidental blast loads // Journal of Constructional Steel Research. 2015. Vol. 106. Pp. 44–56.

12. Du Y., Hao J., Yu J., Yu H., Deng B., Lv D., Liang Z. Seismic performance of a repaired thin steel plate shear wall structure // Journal of Constructional Steel Research. 2018. Vol. 151. Pp. 194–203.

13. Jalali S. A., Darvishan E. Seismic demand assessment of self-centering steel plate shear walls // Journal of Constructional Steel Research. 2019. Vol. 162. 105738.

14. Mu Z., Yang Y. Experimental and numerical study on seismic behavior of obliquely stiffened steel plate shear walls with openings // Thin-Walled Structures. 2020. Vol. 146. 106457.

15. Rjoub Y. S., Hamad A. G. Free vibration of axially loaded multi-cracked Timoshenko beams // Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 8 (100). Article No. 10002. DOI: 10.18720/MCE.100.

16. Fernandez-saez J., Navarro C. Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 256 (1). Pp. 17–31. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4197.

17. Zhong S. C., Oyadiji S. O. Analytical predictions of natural frequencies of cracked simply supported beams with a stationary roving mass // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 311 (1–2). Pp. 328–352. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.009.

18. Lien T. V., Duc N. T., Khiem N. T. Free and forced vibration analysis of multiple cracked FGM multi span continuous beams using dynamic stiffness method // Latin American Journal of Solids and Structures. 2019. Vol. 16 (2). Pp. 1–26. DOI: 10.1590/1679-78255242.

19. Кравчук В. А. Стальные стержни, предварительно напряженные без затяжек. М.: АСВ, 2015. 551 с.

20. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. 2-е изд., перераб. Т. 2. Статически неопределимые системы. М.: Госиздат, 1954. 544 с.

21. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. М.: Стройиздат, 1964. 332 с.

References

1. Smirnova L. N. 16-ya Evropeyskaya konferentsiya po seymostoykomu stroitel'stvu [The 16th European Conference on Earthquake Engineering]. *Seymostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Earthquake engineering. Safety of structures*, 2018, no. 3, pp. 9–12.

2. Kravchuk V. A. *Dinamicheskie parametry nesushchey sposobnosti stal'nykh balok, predvaritel'no napryazhennykh vytyazhkoy tonkoy stenki pri zhestkom zakreplenii ikh*

na oporakh [Dynamic parameters of bearing capacity of steel beams pre-stressed by thin wall stretching at their rigid fastening on supports]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2021, no. 89 (6), pp. 72–78. DOI: 10.23968/1999-5571-2021-18-6-72-78.

3. Tserendorzh B., Gonchig B. *Iz istorii razvitiya stroitel'stva vysotnykh zdaniy v Mongolii i metodika dinamicheskogo metoda rascheta prochnosti mnogoetazhnykh karkasnykh zdaniy* [From the history of development of high-rise building construction in Mongolia and the technique of the dynamic method of calculating the strength of multi-storey frame buildings]. *Vestnik VSGUTU – Bulletin of VSGUTU*, 2011, no. 2 (33), pp. 35–42.

4. Sychova A. M., Zarin S. V., Matskevich A. V. Theory of determining the frequency of natural oscillations of span structures. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, vol. 98 (6), article no. 9803. DOI: 10.18720/MCE.98.

5. Gatti M. Elastic period of vibration calculated experimentally in buildings hosting permanent GPS stations. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2018, vol. 17, no. 3, pp. 607–625.

6. Savin S. N. *Dinamicheskiy monitoring stroitel'nykh konstruksiy na primere pandusa kinokontsertnogo zala «Pushkinskiy» v g. Moskva* [Dynamic monitoring of building structures by the example of the ramp of the “Pushkinskiy” cinema and concert hall in Moscow]. *Inzhenerno-stroitel'niy zhurnal – Engineering and Construction Journal*, 2012, no. 7 (33), pp. 58–62.

7. Sycheva A. M., et al. *Opreделение tekhnicheskogo sostoyaniya proletnykh konstruksiy po chastote sobstvennykh kolebaniy* [Assessing the technical condition of span structures by the frequency of natural vibrations]. *Transportnoe stroitel'stvo – Transport Construction*, 2019, no. 3, pp. 25–28.

8. Song S., Qian Y., Liu J., Xie X., Wu G. Time-variant fragility analysis of the bridge system considering time-varying dependence among typical component seismic demands. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2019, vol. 18, iss. 2, pp. 363–377.

9. Ebadi P., Farajloomanesh S. Seismic design philosophy of special steel plate shear walls. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, vol. 3 (95), pp. 3–18. DOI: 10.18720/MCE.95.

10. Ebadi P., Farajloomanesh S., Pishbin M. Required ductility and capacity for designing steel buildings with special steel shear wall system without stiffener. *Proceedings of the II International Conference on Architecture, Civil Engineering and Urban Planning of the 3rd Millennium*. Tehran, Iran, 2014.

11. Moghimi H., Driver R. G. Performance assessment of steel plate shear walls under accidental blast loads. *Journal of Constructional Steel Research*, 2015, vol. 106, pp. 44–56.

12. Du Y., Hao J., Yu J., Yu H., Deng B., Lv D., Liang Z. Seismic performance of a repaired thin steel plate shear wall structure. *Journal of Constructional Steel Research*, 2018, vol. 151, pp. 194–203.
13. Jalali S. A., Darvishan E. Seismic demand assessment of self-centering steel plate shear walls. *Journal of Constructional Steel Research*, 2019, vol. 162, 105738.
14. Mu Z., Yang Y. Experimental and numerical study on seismic behavior of obliquely stiffened steel plate shear walls with openings. *Thin-Walled Structures*, 2020, vol. 146, 106457.
15. Rjoub Y. S., Hamad A. G. Free vibration of axially loaded multi-cracked Timoshenko beams. *Magazine of Civil Engineering*, 2020, vol. 8 (100), article no. 10002. DOI: 10.18720/MCE.100.
16. Fernandez-saez J., Navarro C. Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol. 256 (1), pp. 17–31. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4197.
17. Zhong S. C., Oyadiji S. O. Analytical predictions of natural frequencies of cracked simply supported beams with a stationary roving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 311 (1–2), pp. 328–352. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.09.009.
18. Lien T. V., Duc N. T., Khiem N. T. Free and forced vibration analysis of multiple cracked FGM multi span continuous beams using dynamic stiffness method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2019, vol. 16 (2), pp. 1–26. DOI: 10.1590/1679-78255242.
19. Kravchuk V. A. *Stal'nye sterzhni, predvaritel'no napryazhennye bez zatyazhek* [Steel bars pre-stressed without tensioning]. Moscow, ASV Publ., 2015, 551 p.
20. Rabinovich I. M. *Kurs stroitel'noy mekhaniki sterzhnevyykh sistem* [Course of structural mechanics of rod systems]. 2-nd ed., revised. Vol. 2. *Sticheski neopredelime sistemy* [Statically indeterminate systems]. Moscow, Gosizdat Publ., 1954, 544 p.
21. Kiselev V. A. *Stroitel'naya mekhanika. Spetsial'nyy kurs* [Structural Mechanics. Special Course]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964, 332 p.