

# Строительная механика и расчет сооружений

УДК 539.3

© И. В. Каменев, соискатель  
© В. В. Карпов, д-р техн. наук, профессор  
© Л. Н. Кондратьева, д-р техн. наук, профессор  
(Санкт-Петербургский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия)  
E-mail: [ivan.v.kamenev@gmail.com](mailto:ivan.v.kamenev@gmail.com),  
[vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), [geotechnica@spbgasu.ru](mailto:geotechnica@spbgasu.ru)

DOI 10.23968/1999-5571-2022-19-6-30-38

© I. V. Kamenev, competitor  
© V. V. Karpov, Dr. Sci. Tech., Professor  
© L. N. Kondratieva, Dr. Sci. Tech., Professor  
(Saint Petersburg State University  
of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russia)  
E-mail: [ivan.v.kamenev@gmail.com](mailto:ivan.v.kamenev@gmail.com),  
[vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), [geotechnica@spbgasu.ru](mailto:geotechnica@spbgasu.ru)

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ CLT-ПАНЕЛЕЙ

### STABILITY OF CLT CYLINDRICAL PANELS

В настоящей работе исследуется устойчивость многослойных цилиндрических панелей. Рассматриваемые оболочки — прямоугольные в плане, выполнены из поперечно-клееной древесины (CLT) и имеют шарнирно-неподвижное опирание. В качестве математической модели исследования НДС используется функционал полной потенциальной энергии деформации с учетом поперечных сдвигов (модель Тимошенко – Рейснера). Проведено исследование устойчивости трех конструкций разной геометрии. На основании полученных данных вычислительного эксперимента проведен анализ влияния числа и ориентации слоев оболочки на устойчивость конструкции. Даны рекомендации по ориентации слоев для гладких панелей.

*Ключевые слова:* цилиндрические панели, CLT, функционал Лагранжа, шарнирно-неподвижное закрепление, устойчивость.

The article considers the stability of multilayer cylindrical panels. The shells under consideration are rectangular in plan, made of cross-laminated timber (CLT) and have a hinged and fixed support. As a mathematical model for studying SSS, the total potential energy of deformation functional is applied, taking into account transverse shifts (Timoshenko-Reisner model). The study of the stability of three constructions of different geometry has been carried out. Based on the obtained data of a computational experiment, an analysis was made of the influence of the number and orientation of shell layers on the stability of the structure. Recommendations on the orientation of layers for smooth surface panels are given.

*Keywords:* cylindrical panels, CLT, stability, Lagrange functional, hinged and rigid support.

#### Введение

В настоящей работе рассматриваются цилиндрические панели, прямоугольные в плане, постоянной толщины  $h$ . За координатную поверхность возьмем срединный слой конструкции [1–3]. Координаты  $x$ ,  $y$  ортогональной системы координат направлены по линиям главных кривизн оболочки [4, 5]. Ось  $z$  нормально ориентирована к срединной поверхности и направлена в сторону вогнутости [6]. Закрепление контура конструкции шарнирно-неподвижное. В каче-

стве действующей на оболочку нагрузки рассматривается равномерно распределенная нормально ориентированная к поверхности оболочки поперечная нагрузка  $q$  (рис. 1) [7–9].

#### Методы

В качестве математической модели напряженно-деформированного состояния оболочки будем использовать модель Тимошенко – Рейснера. Цилиндрическую панель будем рассматривать как частный случай пологой оболочки с нулевой кривизной по одной из сторон (для про-

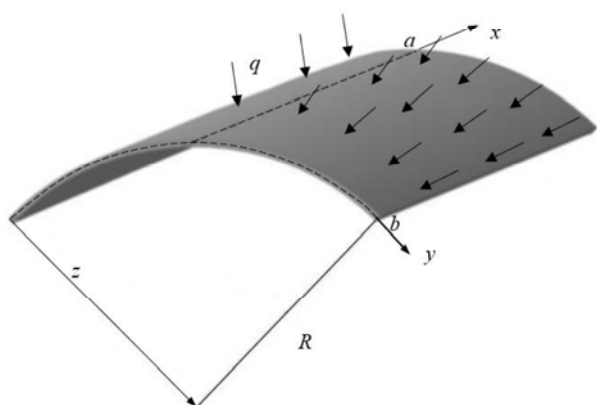


Рис. 1. Схематическое изображение цилиндрической панели под воздействием равномерно распределенной нагрузки

стоты вычислений такой стороной будет параллельная оси  $x$ ). В данной постановке параметры деформации срединного слоя будут выражены следующим образом [10, 11]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_1; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2}\theta_2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \theta_1\theta_2;$$

$$\gamma_{xz} = kf(z)[\Psi_x - \theta_1]; \quad \gamma_{yz} = kf(z)[\Psi_y - \theta_2];$$

$$\theta_1 = -\frac{\partial W}{\partial x}; \quad \theta_2 = -\left(\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right).$$

Здесь за  $U, V, W$  обозначены функции перемещения точки срединного слоя вдоль координат  $x, y, z$  соответственно;  $\Psi_x, \Psi_y$  — функции углов поворота отрезка нормали к срединной поверхности в сечениях  $xOz, yOz$  соответственно;  $k_y$  — главная кривизна оболочки;  $f(z)$  — функция, описывающая распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине оболочки [12, 13]:

$$f = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right); \quad k = \frac{5}{6}.$$

Для слоя, отстоящего от срединного на  $z$  ( $z \in [-h/2, h/2]$ ), параметры деформации примут вид

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где

$$\chi_1 = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}; \quad \chi_2 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}; \quad \chi_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x}\right).$$

Здесь  $\chi_1, \chi_2$  — функции изменения кривизн,  $\chi_{12}$  — функция изменения кручения, выраженные через  $\Psi_x, \Psi_y$  [13].

Для связи деформаций и напряжений воспользуемся законом Гука [14]. Тогда для тонкостенной ортотропной оболочки получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right]; \\ \tau_{xz} &= G_{13}kf(z)[\Psi_x - \theta_1]; \\ \tau_{yz} &= G_{23}kf(z)[\Psi_y - \theta_2], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E_1, E_2$  — модули упругости;  $\mu_{12}, \mu_{21}$  — коэффициенты Пуассона;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  — модули сдвига.

Будем рассматривать цилиндрическую панель из CLT как многослойную конструкцию, состоящую из  $N_i$  слоев, при этом волокна  $i$ -го слоя ориентированы перпендикулярно волокнам  $(i - 1)$ -го и  $(i + 1)$ -го слоев,  $i = [1, N_i]$ . Чтобы получить выражения для усилий, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения, в  $i$ -м слое конструкции, проинтегрируем напряжения (1) по  $z$  в пределах толщины  $i$ -го слоя  $h_i$ , приведенного к общей толщине оболочки. Таким образом, предел интегрирования по переменной  $z$  будет иметь вид:

$$[z_{i-1}; z_i] = \left[ -\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} h_k; -\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^i h_k \right].$$

Таким образом, выражения для усилий и моментов гладкой оболочки в  $i$ -м слое будут иметь вид:

$$\begin{aligned} N_x^i &= \frac{E_x h_i}{1 - \mu_x \mu_y} \left[ (\varepsilon_x + \mu_y \varepsilon_y) + (\chi_2 + \mu_x \chi_1) \left( z_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \right]; \\ N_y^i &= \frac{E_y h_i}{1 - \mu_x \mu_y} \left[ (\varepsilon_y + \mu_x \varepsilon_x) + (\chi_2 + \mu_x \chi_1) \left( z_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \right]; \\ N_{xy}^i &= N_{yx}^i = G_{12} h_i \left[ \gamma_{xy} + \chi_{12} (2z_{i-1} + h_i) \right]; \\ M_x^i &= \frac{E_x h_i}{1 - \mu_x \mu_y} \left[ \left( z_{i-1}^2 + z_{i-1} h_i + \frac{h_i^2}{3} \right) (\chi_1 + \mu_y \chi_2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( z_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \left( \varepsilon_x + \mu_y \varepsilon_y \right) \Big]; \quad (2) \\
 M_y^i &= \frac{E_y h_i}{1 - \mu_x \mu_y} \left[ \left( z_{i-1}^2 + z_{i-1} h_i + \frac{h_i^2}{3} \right) \times \right. \\
 & \times (\chi_2 + \mu_x \chi_1) + \left. \left( z_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \left( \varepsilon_y + \mu_x \varepsilon_x \right) \right]; \\
 M_{xy}^i &= M_{yx}^i = G_{12} h_i \left[ 2 \left( z_{i-1}^2 + z_{i-1} h_i + \frac{h_i^2}{3} \right) \chi_{12} + \right. \\
 & \left. + \left( z_{i-1} + \frac{h_i}{2} \right) \gamma_{xy} \right]; \\
 Q_x^i &= G_{13} k h_i [\Psi_x - \theta_1]; \\
 Q_y^i &= G_{23} k h_i [\Psi_y - \theta_2].
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов Пуассона  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  и модулей упругости  $E_x$ ,  $E_y$  в (2) зависят от ориентации волокон слоя и принимают значения  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{21}$  и  $E_1$ ,  $E_2$  соответственно.

Усилия и моменты по всей толщине оболочки будут представлять собой суммы усилий и моментов по всем  $N_l$  слоям конструкции:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \sum_{i=1}^{N_l} N_x^i; \quad N_y = \sum_{i=1}^{N_l} N_y^i; \\
 N_{xy} &= N_{yx} = \sum_{i=1}^{N_l} N_{xy}^i; \\
 M_x &= \sum_{i=1}^{N_l} M_x^i; \quad M_y = \sum_{i=1}^{N_l} M_y^i; \quad (3) \\
 M_{xy} &= M_{yx} = \sum_{i=1}^{N_l} M_{xy}^i; \\
 Q_x &= \sum_{i=1}^{N_l} Q_x^i; \quad Q_y = \sum_{i=1}^{N_l} Q_y^i.
 \end{aligned}$$

Принимая, что срединная поверхность оболочки занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , функционал полной потенциальной энергии деформации примет вид [10]:

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \right. \\
 & \left. + 2M_{xy} \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + \right. \\
 & \left. + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2qW \right] dx dy. \quad (4)
 \end{aligned}$$

После взятия первой вариации данного функционала и приравнивания ее к нулю можно получить условия на границах, отражающие тип закрепления. Например, для шарнирно-

неподвижного закрепления условия будут следующими:

- при  $x = 0$  и  $x = a$ 

$$U = V = W = 0; M_x = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = 0; \Psi_y = 0; \quad (5)$$

- при  $y = 0$  и  $y = b$ 

$$U = V = W = 0; M_y = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = 0; \Psi_x = 0. \quad (6)$$

Для минимизации функционала (4) воспользуемся методом Ритца [15, 16]. В соответствии с данным методом неизвестные функции представляются в виде:

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{I=1}^N U_I Z_1(I, x, y); \\
 V &= \sum_{I=1}^N V_I Z_2(I, x, y); \\
 W &= \sum_{I=1}^N W_I Z_3(I, x, y); \quad (7) \\
 \Psi_x &= \sum_{I=1}^N \Psi_{xI} Z_4(I, x, y); \\
 \Psi_y &= \sum_{I=1}^N \Psi_{yI} Z_5(I, x, y),
 \end{aligned}$$

где  $U_p$ ,  $V_p$ ,  $W_p$ ,  $\Psi_{xp}$ ,  $\Psi_{yp}$  — неизвестные числовые параметры;  $Z_1(I) \dots Z_5(I)$  — различные сочетания аппроксимирующих функций  $X_1(k) \dots X_5(k)$ ,  $Y_1(l) \dots Y_5(l)$ , удовлетворяющих краевым условиям;  $N$  — число членов разложения в методе Ритца.

Требования, накладываемые методом Ритца на аппроксимирующие функции, подразумевают полноту базиса и удовлетворение краевым условиям (5) и (6) каждого его элемента. В этом случае  $X_1(k) \dots X_5(k)$ ,  $Y_1(l) \dots Y_5(l)$  можно представить в виде

$$X_1(k) = \sin\left(2k\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$Y_1(l) = \sin\left([2l-1]\pi \frac{y}{b}\right);$$

Таблица 1

Варианты геометрических характеристик

Вариант геометрии (ВГ)	1	2	3
$h$ , м	0,18	0,18	0,18
$a$ , м	18,0	18,0	14,4
$b$ , м	9,00	9,00	7,20
$R_y$ , м	45,0	22,5	18,0

$$\begin{aligned}
 X_2(k) &= \sin\left([2k-1]\pi\frac{x}{a}\right), \\
 Y_2(l) &= \sin\left(2l\pi\frac{y}{b}\right); \\
 X_3(k) &= \sin\left([2k-1]k\pi\frac{x}{a}\right), \\
 Y_3(l) &= \sin\left([2l-1]\pi\frac{y}{b}\right); \\
 X_4(k) &= \cos\left([2k-1]\pi\frac{x}{a}\right), \\
 Y_4(l) &= \sin\left([2l-1]\pi\frac{y}{b}\right); \\
 X_5(k) &= \sin\left([2k-1]\pi\frac{x}{a}\right), \\
 Y_5(l) &= \cos\left([2l-1]\pi\frac{y}{b}\right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Аппроксимация (7) с использованием аппроксимирующих функций (8) подставляется в функционал (4), после чего берутся производные по неизвестным числовым параметрам. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона [17, 18].

**Результаты**

В настоящей работе будем рассматривать цилиндрические CLT-панели [19–21], выполненные из ели, для которой в соответствии с СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции» примем следующие параметры:  $E_1 = 11,5 \cdot 10^3$  МПа,  $E_2 = 0,38 \cdot 10^3$  МПа,  $\mu_{12} = 0,45$ ,  $\mu_{21} = 0,015$ . Геометрические параметры рассматриваемых конструкций приведены в табл. 1.

В ходе вычислительного эксперимента исследовалась как устойчивость рассматриваемых конструкций, так и влияние на нее числа слоев

и ориентации волокон в них. Для этого при фиксированной общей толщине оболочки будет увеличиваться число слоев  $N_l = [3; 9]$ , при этом расчеты будут проводиться как для верхнего слоя, ориентированного вдоль оси  $x$ , так и для ориентированного вдоль оси  $y$  (рис. 2). Во втором случае для нечетных слоев модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно меняются местами.

В табл. 2–4 приведены значения критических нагрузок при разной толщине слоев для каждого случая ориентации волокон верхнего (нечетного) слоя к оси  $x$ , а также относительное отклонение значений критической нагрузки потери устойчивости между двумя рассматриваемыми вариантами ориентации слоев  $\Delta$ , полученное по формуле

$$\Delta = \frac{|q_{kr}^{90} - q_{kr}^0|}{q_{kr}^{90}} \cdot 100 \%,$$

где  $q_{kr}^0$  — значение критической нагрузки потери устойчивости для ориентации волокон нечетного слоя вдоль оси  $x$ ,  $q_{kr}^{90}$  — перпендикулярно ей.

На рис. 3 показана зависимость значений критической нагрузки потери устойчивости от числа слоев для обеих ориентаций волокон в нечетных слоях: синим для нечетного числа слоев, красным — для четного. Для ориентации волокон вдоль оси  $x$  графики «нагрузка — число слоев» показаны пунктиром.

**Обсуждение**

Предложенная в работе математическая модель позволяет с высокой точностью проводить исследование устойчивости многослойных цилиндрических панелей с учетом их геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, а также

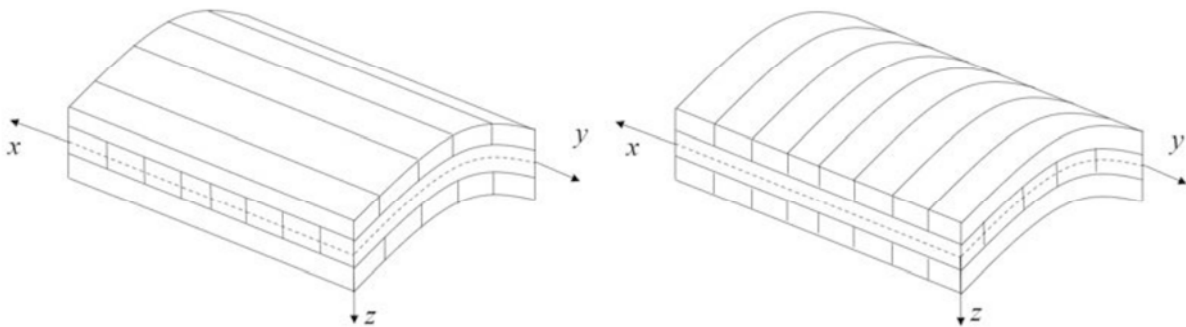


Рис. 2. Схематичное расположение ориентации слоев для трехслойной панели — нечетный слой вдоль оси  $x$  (слева) и поперек (справа)

Таблица 2

**Значения критических нагрузок потери устойчивости для оболочки ВГ 1**

$N_l$	$h_p, 10^{-2} \text{ м}$	$q_{kr}, \text{ МПа}$ [Ориентация волокон нечетного слоя к оси $x$ ]		$\Delta, \%$
		$0^\circ$	$90^\circ$	
3	6,00	0,00775	0,02700	71,29
4	4,50	0,01315	0,02232	41,08
5	3,60	0,01390	0,02370	41,35
6	3,00	0,01520	0,02170	29,95
7	2,57	0,01540	0,02226	30,81
8	2,25	0,01608	0,02112	23,86
9	2,00	0,01612	0,02148	24,95

Таблица 3

**Значения критических нагрузок потери устойчивости для оболочки ВГ 2**

$N_l$	$h_p, 10^{-2} \text{ м}$	$q_{kr}, \text{ МПа}$ [Ориентация волокон нечетного слоя к оси $x$ ]		$\Delta, \%$
		$0^\circ$	$90^\circ$	
3	6,00	0,01953	0,14880	86,88
4	4,50	0,07896	0,07920	0,303
5	3,60	0,05172	0,12900	59,91
6	3,00	0,08976	0,08640	3,888
7	2,57	0,06456	0,11970	46,07
8	2,25	0,09492	0,08910	6,531
9	2,00	0,07152	0,11460	37,59

Таблица 4

**Значения критических нагрузок потери устойчивости для оболочки ВГ 3**

$N_l$	$h_p, 10^{-2} \text{ м}$	$q_{kr}, \text{ МПа}$ [Ориентация волокон нечетного слоя к оси $x$ ]		$\Delta, \%$
		$0^\circ$	$90^\circ$	
3	6,00	0,03588	0,21630	83,41
4	4,50	0,12360	0,13500	8,444
5	3,60	0,08904	0,19110	53,41
6	3,00	0,14244	0,14340	0,669
7	2,57	0,10812	0,17940	39,73
8	2,25	0,14388	0,14610	1,519
9	2,00	0,11784	0,17310	31,92

дискретного влияния каждого слоя конструкции на ее НДС, тем самым позволяя проводить исследование НДС цилиндрических панелей из поперечно-клееной древесины.

В ходе вычислительного эксперимента исследовалась устойчивость трех вариантов конструкций с различными геометрическими параметрами. Было показано, что конструкции, для которых нечетные слои уложены волокнами вдоль образующей панели (вдоль оси  $x$  для рассматриваемого случая), раньше теряют устой-

чивость, чем те, где волокна нечетного слоя перпендикулярны образующей (перпендикулярно оси  $x$ ). Данный эффект обусловлен отсутствием кривизны в данном направлении.

Также показано, что при продольном расположении волокон в нечетных слоях с увеличением числа слоев  $N_l$  значение критической нагрузки потери устойчивости возрастает, а для перпендикулярного расположения — уменьшается, причем для обоих вариантов расположения волокон наблюдается сходимость к некоторому

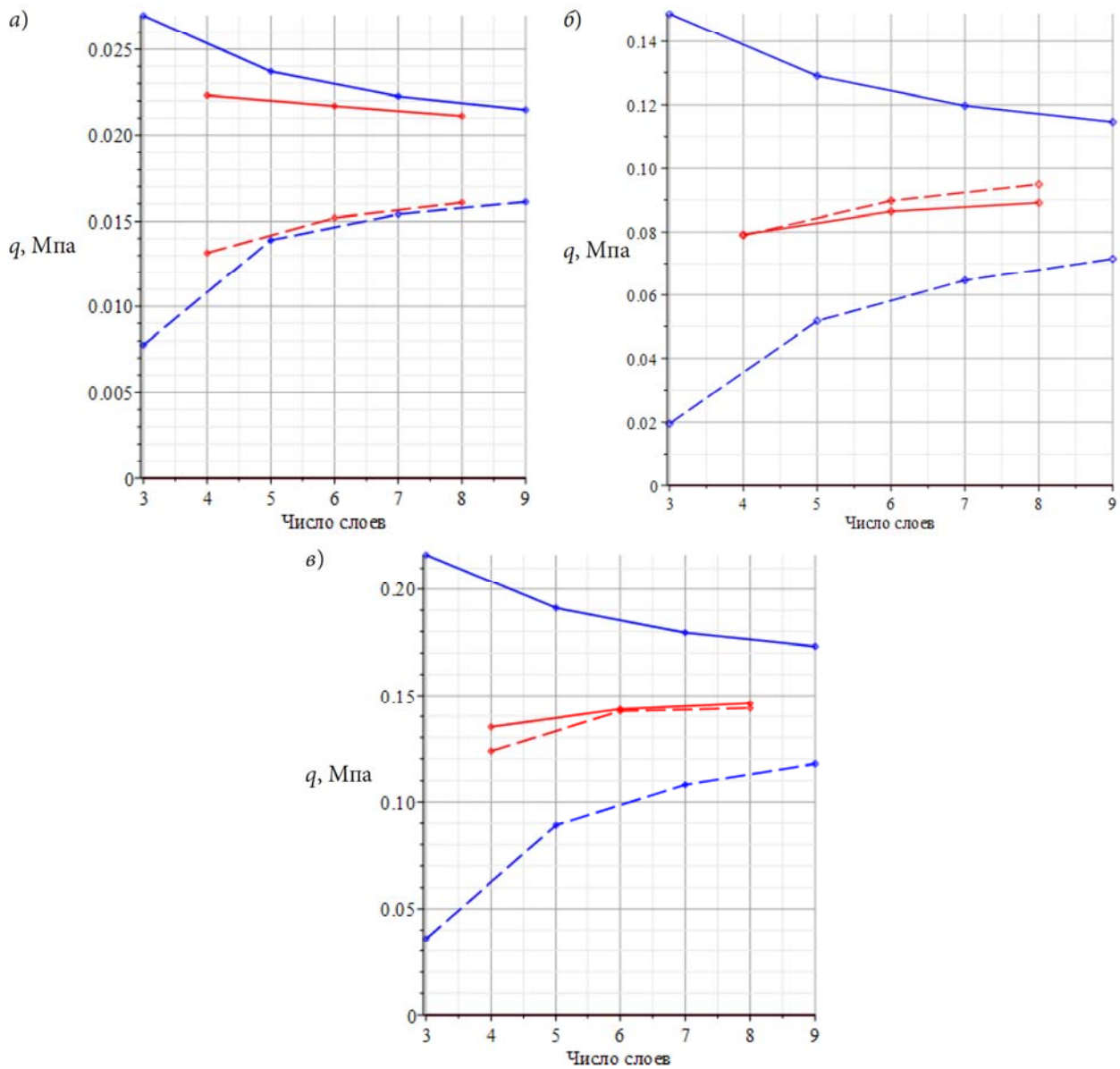


Рис. 3. График зависимости критической нагрузки потери устойчивости от числа слоев: а — для ВГ 1; б — для ВГ 2; в — для ВГ 3

среднему значению. Это объясняется тем, что при увеличении числа слоев при их равной толщине суммарное влияние каждого направления на устойчивость панели асимптотически уравнивается. Подтверждением этому является также то, что при четном  $N_l$  значения критических нагрузок потери устойчивости для разных ориентаций волокон в нечетных слоях ближе друг другу, чем при нечетном  $N_l$ .

На основе вышесказанного оптимальным является нечетное число слоев в CLT-панели

с направлением волокон поперек образующей (вдоль кривизны оболочки) в нечетных слоях конструкции.

#### Выводы

Построена математическая модель НДС многослойных цилиндрических панелей. Предложен алгоритм исследования данной модели, основанный на методах Рунге и Ньютона. С помощью данной модели исследована устойчивость трех вариантов цилиндрических панелей различной геометрии с учетом направления слоев. Показа-

но, что оптимальным является нечетное число слоев в CLT-панели с направлением волокон поперек образующей (вдоль кривизны оболочки) в нечетных слоях конструкции. В дальнейшем планируется провести анализ прочности для подобных конструкций, а также анализ влияния конструктивных особенностей, таких как вырезы и ребра жесткости.

### Библиографический список

1. *Farsadi T., Asadi D., Kurtaran H.* Frequency study of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced polymer cylindrical panels // *Archives of Mechanics*. 2021. Vol. 73 (5–6). Pp. 471–498. DOI: 10.24423/aom.3761.
2. *Голова Т. А., Андреева Н. В.* Анализ методов расчета слоистых пластин и оболочек для расчета многослойных конструкций // *Вестник Евразийской науки*. 2019. Т. 11. № 5. 9 с.
3. *Kang S.-Y., Won D., Park J.-S., Kang Y.-J., Kim S.* Structural Behavior of Large-Diameter Cylindrical Shell with Stiffened Opening // *Metals — Open Access Metallurgy Journal*. 2021. Vol. 11 (9). 1413. DOI: 10.3390/met11091413.
4. *Bich D. H., Nam V. H., Phuong N. T.* Nonlinear postbuckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells // *Vietnam Journal of Mechanics*. 2011. Vol. 33. No. 3. Pp. 131–147.
5. *Okhovat R., Boström A.* Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell // *Composite Structures*. 2018. Vol. 184. Pp. 1197–1203. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.10.034.
6. *Карпов И. В., Кобелев Е. А.* Математическая модель нелинейного деформирования трехслойных оболочек // *Вестник гражданских инженеров*. 2020. № 3 (80). С. 94–100. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-3-94-100.
7. *Хайруллин Ф. С., Сахбиев О. М.* Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // *Вестник Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2017. № 2. С. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11.
8. *Korobko V. I., Savin S. Yu., Ivlev I. A.* Stability analysis of orthotropic plates by the form factor interpolation method // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 924–928. DOI: doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.573.
9. *Bechert S., Sonntag D., Aldinger L., Knippers J.* Integrative structural design and engineering methods for segmented timber shells — BUGA Wood Pavilion // *Structures*. 2021. Vol. 34. Pp. 4814–4833. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.10.032.
10. *Karpov V. V., Semenov A. A.* Refined model of stiffened shells // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 199. Pp. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
11. *Соловей Н. А., Кривенко О. П., Малыгина О. А.* Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 1 (53). С. 56–69. DOI:10.5862/MCE.53.6.
12. *Karpov V. V., Maslennikov A. M.* Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures // *World Applied Sciences Journal*. 2013. Vol. 23 (Problems of Architecture and Construction). Pp. 178–183. DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035.
13. *Karpov V. V., Semenov A. A.* Mixed-form equations for stiffened orthotropic shells of arbitrary canonical shape with static loading // *Journal of Mechanics*. 2018. Vol. 34. Issue 4. Pp. 469–474. DOI: 10.1017/jmech.2017.82.
14. *Ильин В. П., Карпов В. В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л.: Стройиздат, 1986. 168 с.
15. *Бакусов П. А., Семенов А. А.* Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси // *Вестник Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2017. № 3. С. 17–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
16. *Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.
17. *Каменев И. В., Семенов А. А.* Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двойкой кривизны, ослабленных вырезами // *Вестник Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2016. № 2. С. 54–68. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.05.
18. *Каменев И. В., Семенов А. А.* Устойчивость пологих ортотропных оболочек двойкой кривизны при шарнирно-подвижном закреплении контура // *Вестник Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2018. № 2. С. 32–43. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.04.
19. *Wood D., Grönquist P., Bechert S., Scheder-Bieschin L.* From Machine Control to Material Programming: Self-Shaping Wood Manufacturing of a High Performance Curved CLT Structure — Urbach Tower // 2020. FABRICATE 2020 — Making Resilient Architecture. At: London, UK. doi: 10.2307/j.ctv13xpsvw.11.
20. *Bechert S., Aldinger L., Knippers J., Wood D., Menges A.* Structural Design Approach and Novel Applications for Folded Shell Structures made of Single-curved CLT — Tower Urbach, Remstal Gartenschau //

2019. IASS Annual Symposium 2019 — Structural Membranes 2019 Form and Force. At: Barcelona, Spain.

21. Биткин В. Е., Жидкова О. Г., Комаров В. А. Выбор материалов для изготовления размеростабильных несущих конструкций // Вестник Самарского ун-та. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17. № 1. С. 100–117. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-100-117.

## References

1. Farsadi T., Asadi D., Kurtaran H. Frequency study of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced polymer cylindrical panels. *Archives of Mechanics*, 2021, vol. 73 (5–6), pp. 471–498. DOI: 10.24423/aom.3761.
2. Golova T. A., Andreeva N. V. *Analiz metodov rascheta sloistykh plastin i obolochek dlya rascheta mnogosloynnykh konstruktsiy* [Analysis of methods of calculation of layered plates and shells to calculate multilayered structures]. *Vestnik Evraziyskoy nauki – Bulletin of Eurasian Science*, 2019, vol. 11, no. 5, 9 p.
3. Kang S.-Y., Won D., Park J.-S., Kang Y.-J., Kim S. Structural Behavior of Large-Diameter Cylindrical Shell with Stiffened Opening. *Metals – Open Access Metallurgy Journal*, 2021, vol. 11 (9), 1413. DOI: 10.3390/met11091413.
4. Bich D. H., Nam V. H., Phuong N. T. Nonlinear post-buckling of eccentrically stiffened functionally graded plates and shallow shells. *Vietnam Journal of Mechanics*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 131–147.
5. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell. *Composite Structures*, 2018, vol. 184, pp. 1197–1203. DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.10.034.
6. Karpov I. V., Kobelev E. A. *Matematicheskaya model' nelineynogo deformirovaniya trekhsloynnykh obolochek* [Mathematical model of nonlinear deformation of three-layer shells]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 3 (80), pp. 94–100. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-3-94-100.
7. Khayrullin F. S., Sakhbiev O. M. *Raschet ortotropnykh konstruktsiy variatsionnym metodom na osnove trekhmernykh funktsiy s konechnymi nositelyami* [Calculation of orthotropic structures by the variational method based on three-dimensional functions with finite carriers]. *Vestnik Permskogo nats. issled. politekhn. un-ta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2017, no. 2, pp. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11.
8. Korobko V. I., Savin S. Yu., Ivlev I. A. Stability analysis of orthotropic plates by the form factor interpolation method. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 206, pp. 924–928. DOI: doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.573.
9. Bechert S., Sonntag D., Aldinger L., Knippers J. Integrative structural design and engineering methods for segmented timber shells — BUGA Wood Pavilion. *Structures*, 2021, vol. 34, pp. 4814–4833. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.10.032.
10. Karpov V. V., Semenov A. A. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 199, pp. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.
11. Solovey N. A., Krivenko O. P., Malygina O. A. *Konechnoelementnye modeli issledovaniya nelineynogo deformirovaniya obolochek stupenchato-peremennoy tolshchiny s otverstiyami, kanalami i vyemkami* [Finite element models for the study of nonlinear deformation of stepped-variable thickness shells with holes, channels and recesses]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Engineering and Construction Journal*, 2015, no. (53), pp. 56–69. DOI: 10.5862/MCE.53.6.
12. Karpov V. V., Maslennikov A. M. Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures. *World Applied Sciences Journal*, 2013, vol. 23 (*Problems of Architecture and Construction*), pp. 178–183. DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035.
13. Karpov V. V., Semenov A. A. Mixed-form equations for stiffened orthotropic shells of arbitrary canonical shape with static loading. *Journal of Mechanics*, 2018, vol. 34, iss. 4, pp. 469–474. DOI: 10.1017/jmech.2017.82.
14. Il'in V. P., Karpov V. V. *Ustoychivost' rebristykh obolochek pri bol'shikh peremeshcheniyakh* [Stability of ribbed shells at large displacements]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1986, 168 p.
15. Bakusov P. A., Semenov A. A. *Ustoychivost' segmentov toroidal'nykh obolochek pri izmenenii ugla otkloneniya ot vertikal'noy osi* [Stability of toroidal shell segments during changes in the angle of deflection from the vertical axis]. *Vestnik Permskogo nats. issled. politekhn. un-ta. Mekhanika – Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2017, no. 3, pp. 17–36. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.02.
16. Karpov V. V., Ignat'ev O. V., Sal'nikov A. Yu. *Nelineynye matematicheskie modeli deformirovaniya obolochek peremennoy tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Nonlinear mathematical deformation models of shells with variable thickness and algorithms of their study]. Moscow, ASV Publ., St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2002, 420 p.
17. Kamenev I. V., Semenov A. A. *Obosnovanie ispol'zovaniya metoda konstruktivnoy anizotropii pri raschete pologikh obolochek dvoyakoy krivizny, oslablennykh vyrezami* [Rationale for using the method of structural anisotropy in the calculation of double-curvature hollow shells weakened by notches]. *Vestnik Permskogo nats. issled. politekhn. un-ta. Mekhanika – Bulletin of the Perm*



*National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2016, no. 2, pp. 54–68. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.05.

18. Kamenev I. V., Semenov A. A. *Ustoychivost' pologikh ortotropnykh obolochek dvoyakoy krivizny pri sharnirno-podvizhnom zakreplenii kontura* [Stability of hollow orthotropic shells of double curvature with a hinged-moving securing of the contour]. *Vestnik Permskogo nats. issled. politekhn. un-ta. Mekhanika – Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2018, no. 2, pp. 32–43. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.04.

19. Wood D., Grönquist P., Bechert S., Scheder-Bieschin L. From Machine Control to Material Programming: Self-Shaping Wood Manufacturing of a High Performance Curved CLT Structure — Urbach Tower. *FABRICATE 2020 — Making Resilient Architecture*. London, UK. DOI: 10.2307/j.ctv13xpsvw.11.

20. Bechert S., Aldinger L., Knippers J., Wood D., Menges A. Structural Design Approach and Novel Applications for Folded Shell Structures made of Single-curved CLT — Tower Urbach, RemstalGartenschau. *IASS Annual Symposium 2019 — Structural Membranes 2019. Form and Force*. Barcelona, Spain.

21. Bitkin V. E., Zhidkova O. G., Komarov V. A. *Vybor materialov dlya izgotovleniya razmerostabil'nykh nesushchikh konstruktsiy* [Choosing of materials for the manufacture of dimensionally stable supporting structures]. *Vestnik Samarskogo un-ta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie – Bulletin of Samara University. Aerospace Engineering, Technology and Mechanical Engineering*, 2018, vol. 17, no. 1, pp. 100–117. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-100-117.