

УДК 624.012.45.072.2:004.942

© А. А. Котов, канд. техн. наук, доцент
(Мурманский государственный технический
университет, Мурманск, Россия)
E-mail: kotovaa@mstu.edu.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-1-22-32

© А. А. Kotov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Murmansk State Technical University,
Murmansk, Russia)
E-mail: kotovaa@mstu.edu.ru

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ И ПОЛЗУЧЕСТИ

INTEGRAL RIGIDITY OF A REINFORCED CONCRETE BEAM TAKING INTO ACCOUNT CRACKING AND CREEP STRAIN

Выполнено исследование железобетонной балки методом конечных элементов с применением к бетону физической модели в виде модуля деформаций как нелинейной функции уровня напряжений и времени, построенной на основе универсальной модели деформирования и разрушения бетона. Рассмотрен режим нагружения с постоянной скоростью роста равномерно распределенной нагрузки, длительной выдержкой под постоянной нагрузкой и последующим догружением до разрушения. Выполнено моделирование динамических процессов образования трещин, сравнение полученной в исследовании несущей способности с ее нормативной величиной, получена оценка относительной интегральной жесткости балки в ее эксплуатационном состоянии.

Ключевые слова: метод конечных элементов, физическая модель бетона, трещинообразование, интегральная жесткость.

The paper presents the results of the study by the finite element method of a reinforced concrete beam with the application of a physical model to concrete in the form of a deformation modulus as a nonlinear function of the stress level and time which is built on the basis of a universal model of concrete deformation and fracture. The loading mode with a constant rate of uniformly distributed load growth, prolonged exposure to constant loading and subsequent reloading up to damage is considered. The dynamic processes of crack formation are modeled, the load-bearing capacity values obtained in the study is compared with its standard value, and the relative integral rigidity of the beam in its operational state is estimated.

Keywords: finite element method, physical model of concrete, cracking, integral rigidity.

*Памяти профессора СПбГАСУ
Вячеслава Даниловича Харлаба
посвящается*

Давно известно (например [1–5]), что напряженно-деформированное состояние бетона в железобетонных конструкциях, а следовательно, и самих этих конструкций существенно зависит от истории нагружения. Это обусловлено свойством ползучести бетона, т. е. его свойством изменять свое напряженно-деформированное состояние во времени при постоянных воздействиях,

и означает, что в соотношения между напряжениями и деформациями для бетона явным образом должно входить время. Такие соотношения строятся на основе той или иной теории ползучести и в большинстве своем несут интегрально-наследственный характер [4, 6–8], который в практических расчетах железобетонных конструкций создает большие вычислительные сложности. Од-

нако существует и альтернативный вариант описания ползучести [9–12], свободный от интегральной формы представления деформаций ползучести и поэтому более удобный для практических расчетов. Развитием этого второго подхода является представление модуля деформаций бетона как непрерывной функции времени и уровня напряжений, пригодной для расчета железобетонных конструкций в любом режиме нагружения. Такое представление было выполнено на основе так называемой универсальной модели деформирования и разрушения бетона (УМДРБ) [12–15] и представлено в работах [16–18], и это можно считать существенным шагом вперед по сравнению с действующими нормативными методами расчета железобетонных конструкций¹, в которых предусматривается использование только двух дискретных значений модуля деформаций: для кратковременных и для длительных воздействий.

В настоящей работе аналитическая форма представления модуля деформаций бетона как непрерывной функции времени t и уровня напряжений η принята в соответствии с исследованием [16] в следующем виде:

$$D_B^w(\eta, t) = \frac{E_b}{1 + \phi_{b,cr}} \left[1 + a \phi_{b,cr} s_t \cos(b\pi\eta) \right]. \quad (1)$$

Здесь E_b и $\phi_{b,cr}$ — стандартные обозначения начального модуля упругости бетона и его характеристики ползучести; a и b — параметры, зависящие от класса и влажности бетона, представлены в табл. 1 и 2.

¹ СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции.

Таблица 1

Зависимость параметра a в формуле (1) от класса бетона и влажности среды твердения

Влажность, %	Класс бетона			
	B15	B25	B40	B60
Ниже 40	1,0	1,3	1,7	2,3
40–75	1,4	1,8	2,3	3,1
Выше 75	1,9	2,4	3,1	4,2

Функция времени s_t в (1) выражается [16] формулой

$$s_t = (\sum_{k=1}^m e^{-\gamma_k t}) / m, \quad (2)$$

где согласно исследованиям [18] можно принять

$$\gamma_k = \gamma_{дл} d^{m-k}, \quad (3)$$

$m = 6$; $\gamma_{дл} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$; $d = 10$. Поверхность $D_B^w(\eta, t)$ показана на рис. 1.

С другой стороны, при расчете сооружений со статически неопределимым железобетонным каркасом, содержащим изгибаемые железобетонные элементы, работающие с трещинами в растянутой зоне бетона, для получения правильного распределения усилий между элементами необходимо учитывать² снижение интегральной жесткости изгибаемых элементов вследствие трещинообразования. Следовательно, применяя для расчета железобетонных элементов при их изгибе с трещинами переменный модуль деформаций (1), необходимо достаточно адекватно моделировать в заданном режиме нагружения процесс образования трещин. Здесь приводится пример конечноэлементного расчета железобетонной балки в программном модуле SCAD++ версии 21.1.9.9 с использованием переменного во времени и по уровням напряжений модуля деформаций бетона (1) и с моделированием процесса образования трещин в растянутой зоне бетона в принятом режиме нагружения балки. Главной целью этого примерного расчета является получение относительной интегральной жесткости изгибаемого элемента для ее

² СП 52-103-2007. Железобетонные монолитные конструкции зданий.

Таблица 2

Зависимость параметра b в формуле (1) от класса бетона и влажности среды твердения

Влажность, %	Класс бетона			
	B15	B25	B40	B60
Ниже 40	0,40	0,40	0,45	0,45
40–75	0,40	0,45	0,45	0,50
Выше 75	0,45	0,45	0,50	0,50

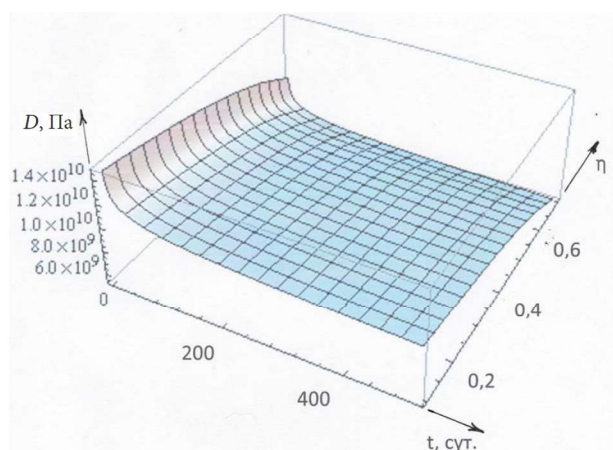


Рис. 1. Зависимость модуля деформаций бетона D , Па, от времени t (593 сут) и от уровней нагружения η $\{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7\}$

последующего использования при расчете статически неопределимых железобетонных каркасов.

Схема исследуемой железобетонной балки показана на рис. 2. Бетон класса В25 работает в условиях средней влажности. Нормативное сопротивление сжатию $R_c = 18,5 \text{ МПа} \cong 1887 \text{ Т/м}^2$, растяжению: $R_p = 1,55 \text{ МПа} \cong 158 \text{ Т/м}^2$ (Т — тонна-сила). Массив бетона формируется из объемных конечных элементов типа 31 (восьмиузловой параллелепипед) размерами $50 \times 40 \times 40 \text{ мм}$ (50 мм — вдоль балки). Арматура продольная нижняя $3\phi 16\text{A}500$, верхняя — $2\phi 8\text{A}400$, во всем диапазоне нагружения она подчиняется закону Гука. Нормативное сопротивление одного стержня растянутой арматуры по усилию: $500 \cdot 10^6 \times 2,011 \cdot 10^{-4} = 1,006 \cdot 10^5 \text{ Н} = 100,6 \text{ кН} = 10,25 \text{ Т}$. Поперечная арматура — хомуты $\phi 6\text{A}240$, расставленные так, как это показано на рис. 2. Арматура протягивается по узлам объемных бетонных конечных элементов, расстояние от центра тяжести арматуры до наружных граней — 40 мм . Балка опирается по концам на упругое основание (кирпич керамический высотой 3 м), глубина опирания 150 мм . Горизонтальные связи в опорных зонах установлены в минимально

необходимом количестве. Нагрузка равномерно распределена по верхней грани.

Программа числового испытания балки была назначена следующей. Сначала балка нагружалась равномерными ступенями в течение 20 сут с интервалом двое суток до уровня эксплуатационной нагрузки. Затем выдерживалась под этой нагрузкой до момента времени 220 сут с фиксацией состояния балки через каждые 20 сут. После этого балка была догружена до разрушения в том же режиме.

Для назначения величины одной нагрузочной ступени необходима величина приблизительного нормативного сопротивления балки по изгибающему моменту. Она была получена из предположения нормативного предельного состояния по растянутой арматуре: $M_n = 12,29 \text{ Тм}$. Соответствующая активная (без учета собственного веса) равномерно распределенная погонная нагрузка составила $q_n = 2,65 \text{ Т/м}$, а узловая поверхностная $f_n = 0,0166 \text{ Т}$; округленно было принято $f_n = 0,02 \text{ Т}$. Отсюда величина одной ступени узловой нагрузки на верхнюю грань $f = 0,002 \text{ Т}$.

В процессе конечноэлементного расчета балки в указанном выше режиме переменный модуль деформаций бетона принимался по формуле (1) с учетом (2) и (3). Для бетона класса В25, работающего в условиях средней влажности, начальный модуль деформаций бетона $E_b = 30 \cdot 10^3 \text{ МПа} = 3\,060\,000 \text{ Т/м}^2$, характеристика ползучести бетона $\varphi_{b,cr} = 2,5$. Параметры a и b приняты по табл. 1 и 3: $a = 1,8$, $b = 0,45$. При этих значениях параметров формула (1) принимает вид

$$D_B^w(\eta, t) = 8,74 \cdot 10^5 [1 + 4,5s_t \cos(1,413\eta)], \text{ Т/м}^2. \quad (4)$$

Значения функции времени s_t (2) и модуля деформаций (4) в рассматриваемые моменты времени представлены в табл. 3. Модули деформаций бетона в ней являются функциями уровня напряжений η , то есть в разных областях бетонного массива балки они должны назначаться разными. Для реа-

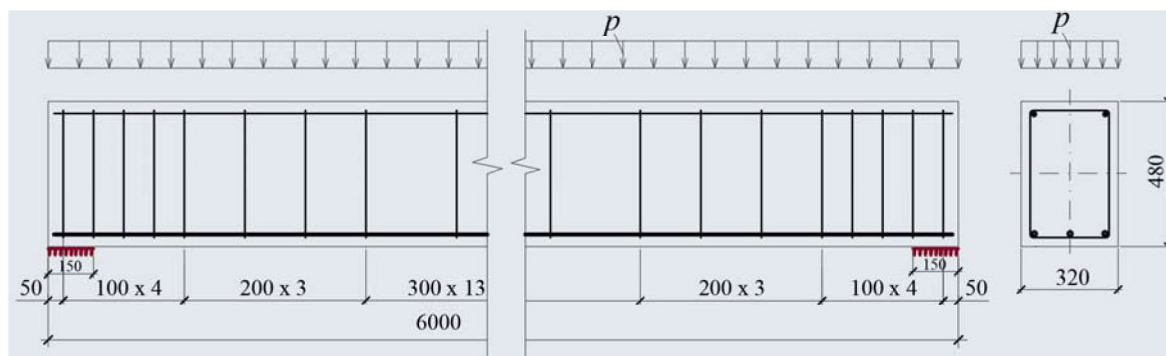


Рис. 2. Схема исследуемой железобетонной балки

лизации этого возможные значения напряжений в сжатой и растянутой зонах бетона были разбиты на 10 диапазонов, каждому из которых приписывался соответствующий уровень напряжения. Согласование уровней напряжений с диапазонами напряжений представлено в табл. 4.

При первом шаге по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 2$ сут и при узловой нагрузке $f = 0,002$ Т, стабильное состояние балки было достигнуто после завершения образования первой, центральной трещины. Для достижения этого стабильного состояния было выполнено несколько расчетных итераций с разными высотами трещины, пока напряжения в бетоне над ее вершиной не стали сжимающими, что и позволило остановить динамический процесс образования трещины. В первом стабильном состоянии сжимающие напряжения достигли уровня 0,2, а растягивающие — уровня 1,0, в соответствии с чем были скорректированы модули деформаций. Первое стабильное состояние показано на рис. 3 фрагментом балки в области центральной трещины.

При втором шаге по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 4$ сут и узловой нагрузке $f = 0,004$ Т, стабильное состояние балки было достигнуто после завершения образования следующих — второй, третьей и четвертой трещин (с каждой стороны от центральной). В процессе их формирования сжимающие напряжения достигли уровня

0,3, а уровень растягивающих уже был 1,0, т. е. повышаться больше не мог. В соответствии с этим в ближайших окрестностях магистральных трещин процесс микротрещинообразования в бетоне моделировался понижением модуля деформаций при растяжении на порядок по сравнению с уровнем 1,0 при растяжении. Это второе стабильное состояние показано на рис. 4, где представлен фрагмент балки справа от середины с четырьмя первыми трещинами.

При третьем шаге по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 6$ сут и узловой нагрузке $f = 0,006$ Т, стабильное состояние балки было достигнуто после завершения образования следующей, пятой трещины; в процессе ее формирования сжимающие напряжения остались в пределах уровня 0,3. При четвертом шаге по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 8$ сут и узловой нагрузке $f = 0,008$ Т, стабильное состояние балки было достигнуто после завершения образования следующей, шестой трещины; в процессе ее формирования сжимающие напряжения достигли уровня 0,4. При пятом шаге по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 10$ сут и узловой нагрузке $f = 0,010$ Т, стабильное состояние балки было достигнуто после завершения образования следующей, седьмой трещины. В процессе ее формирования сжимающие напряжения достигли уровня 0,5. Восьмая трещина в балке образовалась после седьмого шага по време-

Таблица 3

Значения переменных во времени параметров режима нагружения

Номер шага	Время, сут	Узловая нагрузка, Т	Функция времени s_t	Модуль деформаций $D(\eta)$, Т/м ²
0	0	0	1,000	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 4,5 \cos(1,413\eta)]$
1	2	0,002	0,617	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,78 \cos(1,413\eta)]$
2	4	0,004	0,571	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,57 \cos(1,413\eta)]$
3	6	0,006	0,557	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,51 \cos(1,413\eta)]$
4	8	0,008	0,518	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,33 \cos(1,413\eta)]$
5	10	0,010	0,506	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,28 \cos(1,413\eta)]$
6	12	0,012	0,486	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,19 \cos(1,413\eta)]$
7	14	0,014	0,475	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,14 \cos(1,413\eta)]$
8	16	0,016	0,465	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,09 \cos(1,413\eta)]$
9	18	0,018	0,457	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,06 \cos(1,413\eta)]$
10	20	0,020	0,450	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 2,03 \cos(1,413\eta)]$
20	40	0,020	0,405	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,82 \cos(1,413\eta)]$
30	60	0,020	0,374	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,68 \cos(1,413\eta)]$
40	80	0,020	0,351	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,58 \cos(1,413\eta)]$
50	100	0,020	0,334	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,50 \cos(1,413\eta)]$
60	120	0,020	0,320	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,44 \cos(1,413\eta)]$
70	140	0,020	0,308	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,39 \cos(1,413\eta)]$
80	160	0,020	0,299	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,35 \cos(1,413\eta)]$
90	180	0,020	0,291	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,31 \cos(1,413\eta)]$
100	200	0,020	0,284	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,28 \cos(1,413\eta)]$
110	220	0,020	0,278	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,25 \cos(1,413\eta)]$
111	222	0,022	0,277	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,25 \cos(1,413\eta)]$
112	223	0,023	0,277	$8,74 \cdot 10^5 [1 + 1,25 \cos(1,413\eta)]$

ни и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 14$ сут и узловой нагрузке $f = 0,014$ Т; в процессе ее формирования сжимающие напряжения достигли уровня 0,6. После восьмого шага по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 16$ сут и узловой нагрузке $f = 0,016$ Т восьмая трещина поднялась вверх еще на один слой. После девятого шага по времени и по нагрузке, т. е. в момент времени $t = 18$ сут и узловой нагрузке $f = 0,018$ Т, уровень напряжений в сжатой зоне повысился

до 0,7, и соответствующим образом был понижен модуль деформаций. При этом усилие в одном стержне растянутой арматуры достигло 8,05 Т, т. е. стало приближаться к предельному усилию растяжения 10,25 Т. На последнем, десятом шаге равномерного нагружения, т. е. при узловой нагрузке 0,020 Т и в момент времени 20 сут, напряжения в бетоне сжатой зоны хоть и увеличились, но остались в пределах уровня 0,7, а усилие в растянутом арматурном стержне достигло

Таблица 4

Диапазоны напряжений и соответствующие им уровни напряжений

Диапазоны сжимающих напряжений, Т/м ²	Уровни напряжений η	Диапазоны растягивающих напряжений, Т/м ²
0–190	0,1	0–16
191–380	0,2	17–32
381–570	0,3	33–48
571–760	0,4	49–64
76–950	0,5	65–80
951–1140	0,6	81–96
1141–1330	0,7	97–112
1331–1520	0,8	113–128
1521–1710	0,9	129–144
1711–1900	1,0	145–160

величины 8,92 Т, но все же осталось меньше нормативного сопротивления 10,25 Т.

Таким образом, по завершении режима равномерного нагружения балка не исчерпала своей нормативной несущей способности, осталась в эксплуатационном состоянии. Это состояние балки представлено на рис. 5 изображениями правой половины балки и эпюры усилий в центральной части растянутого арматурного стержня.

Далее был реализован режим постоянной узловой нагрузки в размере 0,020 Т. Дальнейшая выдержка балки под этой эксплуа-

тационной нагрузкой в течение 200 сут, т. е. с момента времени 20 сут до 220 сут, привела к тому, что балка сохраняла стабильное состояние, в том смысле что новые трещины не образовывались, уровни напряжений в бетоне оставались прежними. Модули деформаций корректировались по времени. Это стабильное на момент времени 220 сут состояние показано рис. 6, где представлена правая половина балки со всеми трещинами, а также эпюра усилий в стержне растянутой арматуры.

На рис. 6 видно, что напряженное состояние балки за 200-суточную выдержку под постоянной нагрузкой изменилось незначительно: максимальное напряжение в сжатом бетоне увеличилось с 603 до 612 Т/м², а усилие в арматурном стержне — с 8,92 до 8,96 Т. При этом оба этих показателя остались в допустимых пределах: $612 \text{ Т/м}^2 \ll (R_c = 1887 \text{ Т/м}^2)$, $8,96 \text{ Т} < (N_n = 10,25 \text{ Т})$. Деформации в виде максимального прогиба балки выросли также незначительно: с 20,8 до 22,0 мм.

С целью получения предельного состояния балки после выдержки ее под постоянной нагрузкой снова был реализован режим нагружения с той же постоянной скоростью, которая была применена при первоначаль-

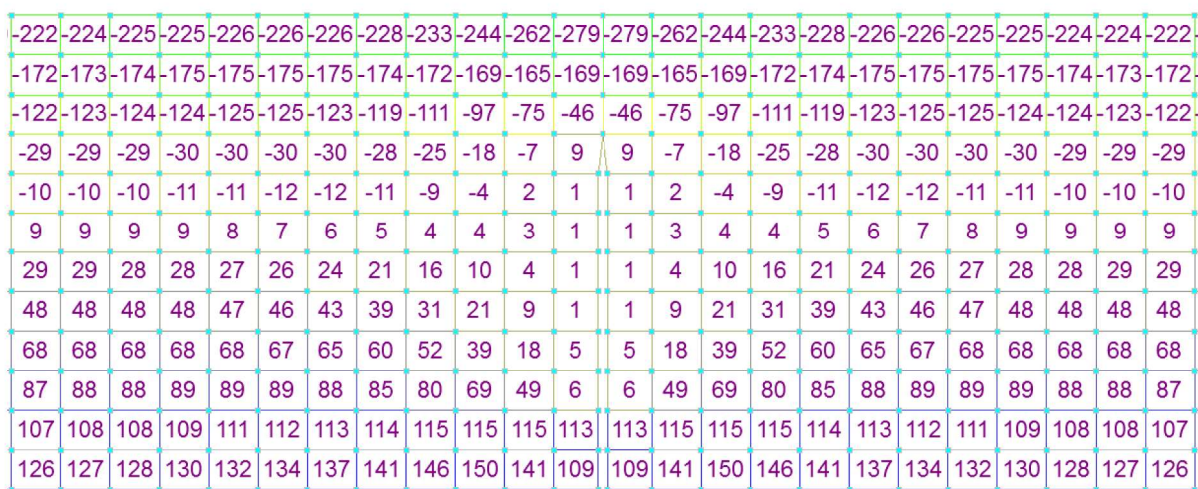


Рис. 3. Нормальные напряжения в бетоне при узловой нагрузке 0,002 Т, модуле деформаций при сжатии $D(0;2) = 3\ 200\ 000 \text{ Т/м}^2$ и модуле деформаций при растяжении $D(10;2) = 1\ 260\ 000 \text{ Т/м}^2$

-434	-434	-395	-369	-369	-395	-430	-421	-377	-349	-352	-381	-414	-399	-350	-327	-331	-360	-385	-361	-304	-265	-242	-229	-222	-218	-214
-172	-172	-206	-225	-224	-204	-171	-173	-192	-206	-204	-185	-165	-160	-187	-197	-192	-172	-154	-148	-171	-179	-179	-177	-174	-171	-168
-4	-4	-29	-45	-44	-28	-2	-8	-54	-77	-73	-44	-1	-21	-58	-77	-70	-40	0.5	-26	-67	-98	-116	-124	-126	-125	-123
2	2	-2	-10	-10	-0.4	2	1	0.4	-5	-3	4	3	3	-0.2	-5	-3	5	3	1	-7	-20	-29	-33	-34	-34	-33
2	2	4	3	3	4	2	2	5	6	7	6	3	2	5	6	7	6	3	1	-1	-6	-12	-15	-16	-16	-15
1	1	3	5	5	4	1	1	4	6	7	5	1	1	4	6	7	4	1	1	2	2	1	1	1	2	3
0.3	0.3	2	5	5	2	0.3	0.3	2	5	5	3	0.4	0.3	2	5	5	3	0.5	0.4	3	9	14	17	19	21	22
0.3	0.3	4	8	8	4	0.3	0.2	4	8	9	4	0.4	0.2	3	8	8	4	0.4	0.5	6	17	27	33	37	40	42
2	2	13	24	24	13	2	2	12	23	23	12	2	2	12	22	22	11	2	2	14	31	44	50	58	62	63
14	14	43	56	56	42	14	15	43	55	53	39	13	14	42	53	50	36	11	16	46	56	50	74	83	86	86
20	20	24	27	27	24	19	20	24	26	26	23	18	20	23	25	24	22	17	19	22	25	112	117	116	114	111
23	23	35	41	41	35	23	22	34	40	40	34	22	21	32	37	37	32	21	21	33	44	120	139	143	139	134

Рис. 4. Нормальные напряжения в бетоне при узловой нагрузке 0,004 Т, модуле деформаций при сжатии $D(03;4) = 2\,920\,000\text{ Т/м}^2$ и модуле деформаций при растяжении $D(10;4) = 1\,230\,000\text{ Т/м}^2$

ном нагружении, 0,002 Т/сут. В этом процессе догружения предельное состояние балки было достигнуто после исчерпания несущей способности растянутой арматурой при узловой нагрузке 0,023 Т в момент времени 223 сут: предельное усилие в растянутой арматуре составило величину 10,16 Т, что практически равно нормативному сопротивлению 10,25 Т. Максимальный прогиб в предельном состоянии составил 24,9 мм, т. е. увеличился примерно пропорционально. Предельное состояние балки показано на рис. 7 изображениями напряжений в бетоне и усилий в растянутой арматуре.

Экспертиза несущей способности рассмотренной выше балки в модуле «Арбат» в режиме определения грузоподъемности, реализованном в соответствии с действующим СП¹, привела к расчетной погон-

ной нагрузке 2,72 Т/м при коэффициенте использования 0,999. С учетом того, что в рассмотренном здесь расчете предельная погонная грузоподъемность составила $0,023 \cdot 8/0,05 = 3,68\text{ Т/м}$, разницу между этими двумя нагрузками можно считать запасом прочности с коэффициентом $3,68/2,72 = 1,35$, который выглядит вполне целесообразным.

Интегральная жесткость рассматриваемой балки в соответствии с обоснованиями, изложенными в работе [19], определялась как отношение к максимальному прогибу ее оси прогиба аналогичной виртуальной железобетонной балки без трещин. При эксплуатационном значении узловой нагрузки 0,016 Т (предельная — 0,023 Т) в балке с трещинами максимальный прогиб составил 16,7 мм, а в виртуальной балке без трещин — 3,8 мм. Таким образом, относительная ин-

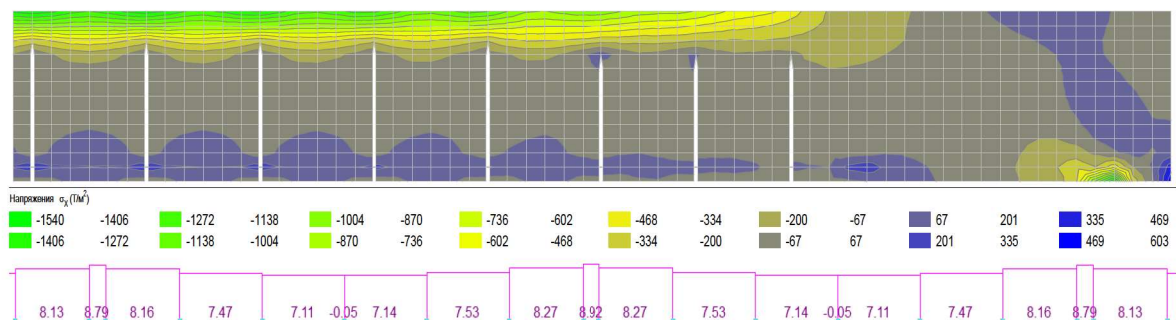


Рис. 5. Нормальные напряжения в бетоне и продольное усилие в растянутом арматурном стержне при узловой нагрузке 0,020 Т в момент времени 20 сут

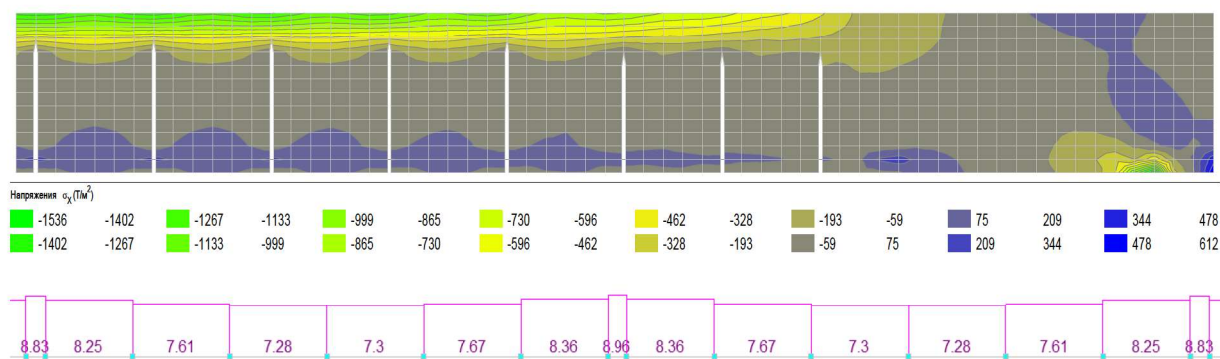


Рис. 6. Нормальные напряжения в бетоне и продольное усилие в растянутом арматурном стержне при узловой нагрузке 0,020 Т в момент времени 220 сут

тегральная жесткость балки с трещинами: $3,8 / 16,7 = 0,23$. В нормативе² предписывается при расчете статически неопределимых каркасных железобетонных сооружений с изгибаемыми элементами, работающими в условиях трещинообразования, понижать модуль деформаций бетона умножением на коэффициенты 0,2–0,3. Полученный здесь результат вполне вписывается в эти нормативные рекомендации, опирающиеся на большой практический опыт эксплуатации подобных сооружений.

В работе [20] для аналогичной балки был получен коэффициент понижения интегральной жесткости за счет трещино-

образования, без учета ползучести $\beta_t = 0,38$. Здесь коэффициент понижения интегральной жесткости с учетом ползучести составил $\beta = 0,23$. Поскольку можно представить

$$\beta = \beta_t \beta_n, \quad (5)$$

где β_n — коэффициент понижения интегральной жесткости за счет ползучести, то этот последний коэффициент составляет $\beta_n = \beta / \beta_t = 0,23 / 0,38 = 0,61$. Таким образом, можно сделать вывод, что трещинообразование снижает жесткость балки на 62 %, а ползучесть бетона — еще на 39 %.

Наглядная информация о развитии деформативности балки в процессе ее нагружения представлена графиком зависимости ее мак-

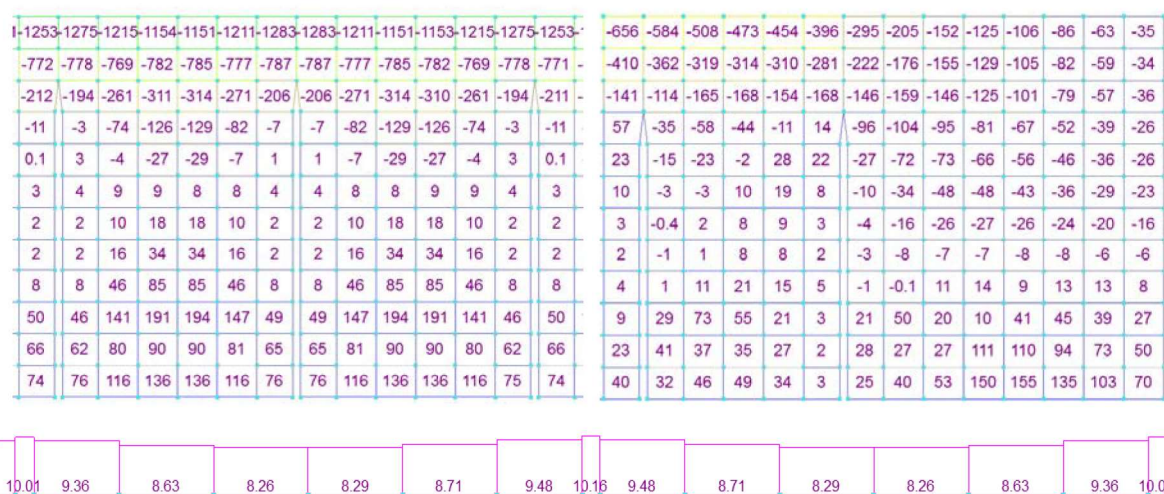


Рис. 7. Нормальные напряжения в бетоне и продольные усилия в арматурном стержне в предельном состоянии при узловой нагрузке 0,023 Т

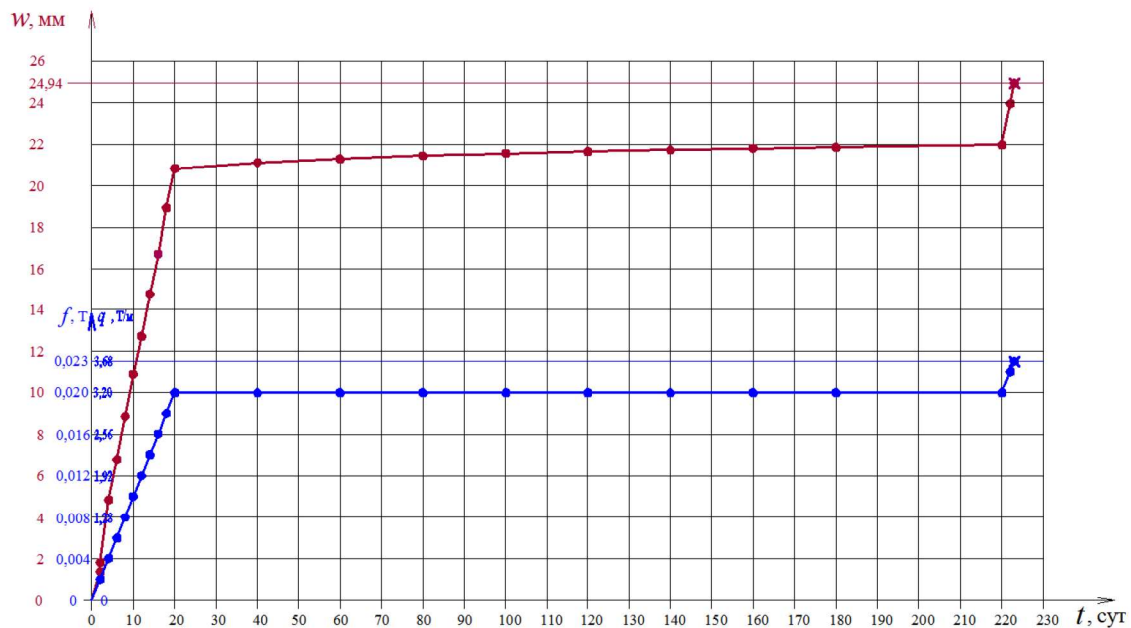


Рис. 8. График нагружения (синий) и график роста во времени максимального прогиба (красный)

симального прогиба от времени, построенным на фоне режима нагружения (рис. 8).

Картину, показанную на рис. 8, можно рассматривать как аналог более распространенной в традиционных научных исследованиях зависимости между изгибающим моментом и кривизной изогнутой оси балки. Здесь добавлено время как существенная характеристика истории процесса, а вместо момента и кривизны приняты соответственно нагрузка и центральный прогиб. Замена момента нагрузкой не принципиальна, поскольку они пропорциональны друг другу, а вот прогиб является более презентативной характеристикой деформативности балки, нежели кривизна, поскольку является величиной интегральной, определяемой состоянием всей балки, в отличие от локальной кривизны.

На графике роста прогиба явным образом показан один вертикальный скачок, соответствующий моменту динамического образования первой трещины. Скачки, соответствующие образованиям остальных трещин, явным образом не показаны, потому что в соответствии с принятым режимом нагру-

жения не фиксировались моменты начала их образования. Так, в промежутке времени от 2 до 4 сут образовались сразу четыре трещины, и на графике «прогиб — время» это отразилось более быстрым ростом прогиба на этом участке. При постоянной нагрузке в диапазоне от 20 до 220 сут прогиб увеличивался с замедляющейся скоростью, что характерно для явления ползучести бетона.

Вывод. Полученный здесь результат в виде относительной интегральной жесткости β может быть использован для применения в комплексных конечноэлементных расчетах статически неопределимых железобетонных каркасов с учетом трещинообразования и ползучести изгибаемых элементов.

Библиографический список

1. Александровский С. В., Васильев П. И. Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций / под ред. С. В. Александровского. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.
2. Катин Н. И. Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях // Исследование свойств

бетона и железобетонных конструкций: сб. ст. / под ред. А. А. Гвоздева. М.: Госстройиздат, 1959. С. 74–153.

3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

4. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 418 с.

5. Яшин А. В. Деформации бетона под длительным воздействием высоких напряжений и его длительное сопротивление при сжатии // Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций: сб. ст. / под ред. А. А. Гвоздева и С. М. Крылова. М.: Стройиздат, 1969. С. 38–76.

6. Арутюнян Н. Х. Современное состояние развития теории ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций / под ред. С. В. Александровского. М.: Стройиздат, 1976. С. 5–96.

7. Chiorino M. A. Analysis of Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete: an Internationally Harmonized Format — Recent Updates // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 2. С. 4–18.

8. Muller H. S. Constitutive Models for Creep of Concrete — From the Past to the Future // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 3. С. 55–69.

9. Васильев П. И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом влияния времени // Известия ВНИИГ. 1951. Т. 45. С. 76–93.

10. Котов А. А. О возможности использования энергетической теории нелинейной ползучести и длительной прочности для описания кратковременных процессов в бетоне // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1981. Вып. 14. С. 18–22.

11. Фрайфельд С. Е. Совершенствование теории железобетона на основе реологических свойств материалов // Ползучесть строительных материалов и конструкций: сб. ст. / под ред. А. Р. Ржаницына. М.: Госстройиздат, 1964. С. 283–290.

12. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (III) // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 127–132.

13. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (I) // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1981. Вып. 14. С. 11–17.

14. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (II) // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1982. С. 136–141.

15. Котов А. А. К теории ползучести и длительной прочности бетона // Вестник МГТУ. 2002. Т. 5, № 2. С. 161–166.

16. Котов А. А. Модуль деформаций бетона как функция уровня нагружения и времени // сб. докл. Второй Национальной науч. конф. «Актуальные проблемы строительной отрасли и образования — 2021» (Москва, 8 декабря 2021 г.). М.: МИСИ — МГСУ, 2022. С. 27–35.

17. Котов А. А. Ползучесть в бетоне и железобетонных конструкциях // Материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Наука и образование – 2020» (Мурманск, 1 декабря 2020 г.). Мурманск: МГТУ, 2021. С. 451–457.

18. Котов А. А., Власенко В. Н. О назначении параметров универсальной модели деформирования и разрушения бетона // Международный научно-исследовательский журнал. 2020. № 10-1 (100). С. 22–28.

19. Котов А. А. Интегральная жесткость железобетонной балки с трещинами // Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Наука и образование в Арктическом регионе» (Мурманск, 4–8 апреля 2016 г.). Мурманск: МГТУ, 2016. С. 79–84.

20. Иванова Е. И., Котов А. А. Жесткость железобетонных балок в конечноэлементных расчетных моделях каркасных сооружений // Современное строительство и архитектура. 2019. № 1 (13). С. 19–25.

References

1. Aleksandrovskiy S. V., Vasil'ev P. I. *Eksperimental'nye issledovaniya polzuchesti betona* [Experimental studies of concrete creep]. *Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruktсий* [In: Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures]. Ed. by Aleksandrovskiy S. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1976, pp. 97–152.

2. Katin N. I. *Issledovanie polzuchesti betona pri vysokikh napryazheniyakh* [Study of concrete creep under high stresses]. *Sb. st. «Issledovanie svoystv betona i zhelezobetonnykh konstruktсий»* [In: "Properties of concrete and concrete structures"]. Ed. by Gvozdev A. A. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1959, pp. 74–153.

3. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 744 p.

4. Rzhanytsyn A. R. *Teoriya polzuchesti* [Theory of creep]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1968, 418 p.

5. Yashin A. V. *Deformatsii betona pod dlitel'nym vozdeystviem vysokikh napryazheniy i ego dlitel'noe soprotivlenie pri szhatii* [Concrete deformation under long-term effects of high stresses and its long-term compressive strength]. *Sb. st. «Osobennosti deformatsiy betona i zhelezobetona i ispol'zovanie EVM dlya otsenki ikh vliyaniya na povedenie konstruktсий»* [In: Coll. works "Features of concrete and reinforced concrete deformations and the use

of the computer for evaluating their effects on structural behavior: collected articles”]. Eds Gvozdev A. A. and Krylov S. M. Moscow, Stroyizdat Publ., 1969, pp. 38–76.

6. Arutyunyan N. Kh. *Sovremennoe sostoyanie razvitiya teorii polzuchesti betona* [The modern state of the concrete creep theory]. *Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruktsiy* [In: Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures]. Ed. by Aleksandrovskiy S. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1976, pp. 5–96.

7. Chiorino M. A. Analysis of structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Internationally harmonized format. Recent Updates. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and Civil Engineering*, 2019, no. 2, pp. 4–18.

8. Muller H. S. Constitutive Models for Creep of Concrete — From the Past to the Future. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and Civil Engineering*, 2019, no. 3, pp. 55–69.

9. Vasil'ev P. I. *Svyaz' mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami v betone pri szhatii s uchetom vliyaniya vremeni* [Relationship between stresses and strains in concrete under compression effect, taking into account the effect of time]. *Izvestiya VNIIG – Bulletin of VNIIG*, 1951, vol. 45, pp. 76–93.

10. Kotov A. A. *O vozmozhnosti ispol'zovaniya energeticheskoy teorii nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti dlya opisaniya kratkovremennykh protsessov v betone* [On the possibility of using the energy theory of nonlinear creep and long-term strength to describe short-term processes in concrete]. *Trudy mezhvuz. tematich. konf. «Mekhanika sterzhnevnykh sistem i sploshnykh sred»* [Proceedings of the Interuniversity thematic conf. “Mechanics of rod systems and continuous media”]. Leningrad, LISI Publ., 1981, iss. 14, pp. 18–22.

11. Frayfeld S. E. *Sovershenstvovanie teorii zhelezobetona na osnove reologicheskikh svoystv materialov* [Improvement of the reinforced concrete theory on the basis of rheological properties of materials]. *Sb. st. «Polzuchest' stroitel'nykh materialov i konstruktsiy»* [Coll. works “Creep of building materials and constructions”]. Ed. by Rzhantsyn A. R. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1964, pp. 283–290.

12. Kharlab V. D. *Energeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (III)* [Energy theory of nonlinear creep and lasting strength of brittle collapsible materials (III)]. *Trudy mezhvuz. tematich. konf. «Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruktsiy»* [Proceedings of the International sci. conf. “Search in theoretical principles of calculating building structures”]. Leningrad, LISI Publ., 1983, pp. 127–132.

13. Kharlab V. D. *Energeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (I)* [Energy theory of nonlinear creep and long-term strength of brittle fracturing

materials (I)]. *Sb. tr «Mekhanika sterzhnevnykh sistem i sploshnykh sred»* [Coll. works “Mechanics of rod systems and continuous media”]. Leningrad, LISI Publ., 1981, iss. 14, pp. 11–17.

14. Kharlab V. D. *Energeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (II)* [Energy theory of nonlinear creep and lasting strength of brittle fracturing materials (II)]. *Mezhvuz. tematich. sb. tr «Issledovaniya po mekhanike stroitel'nykh konstruktsiy i materialov»* [Interuniversity Thematic Collection of Papers “Studies in mechanics of building structures and materials”]. Leningrad, LISI Publ., 1982, pp. 136–141.

15. Kotov A. A. *K teorii polzuchesti i dlitel'noy prochnosti betona* [To the theory of creep and long-term strength of concrete]. *Vestnik MGTU – Bulletin of MSTU*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 161–166.

16. Kotov A. A. *Modul' deformatsiy betona kak funktsiya urovnya nagruzheniya i vremeni* [Concrete deformation modulus as a function of loading level and time]. *Trudy Vtoroy Natsional'noy nauch. konf. «Aktual'nye problemy stroitel'noy otrasli obrazovaniya — 2021 (Moskva, 8 dekabrya 2021 g.)* [Proceedings of the 2-nd National conf. “Actual problems of building industry and education – 2021” (Moscow, December 8, 2021)]. Moscow, MISI – MGSU Publ., 2022, pp. 27–35.

17. Kotov A. A. *Polzuchest' v betone i zhelezobetonnykh konstruktsiyakh* [Creep in concrete and reinforced concrete structures]. *Trudy nauch.-prakt. konf. «Nauka i obrazovanie — 2020» (Murmansk, 1 dekabrya 2020 g.)* [Proceedings of the All-Russian scientific and practical conference “Science and Education – 2020” (Murmansk, December 1, 2020)]. Murmansk, MGTU Publ., 2021, pp. 451–457.

18. Kotov A. A., Vlasenko V. N. *O naznachenii parametrov universal'noy modeli deformirovaniya i razrusheniya betona* [About selection of parameters of the universal model of concrete deformation and fracture]. *Mezhdunarodniy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal – International Scientific Research Journal*, 2020, no. 10–1 (100), pp. 22–28.

19. Kotov A. A. *Integral'naya zhestkost' zhelezobetonnoy balki s treshchinami* [Integral rigidity of a reinforced concrete beam with cracks]. *Trudy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. «Nauka i obrazovanie v Arkticheskom regione» (Murmansk, 4–8 aprelya 2016 g.)* [Proceedings of the International scientific and practical conference “Science and Education in the Arctic Region” (Murmansk, April 4–8, 2016)]. Murmansk, MGTU Publ., 2016, pp. 79–84.

20. Ivanova E. I., Kotov A. A. *Zhestkost' zhelezobetonnykh balok v konechnoelementnykh raschetnykh modelyakh karkasnykh sooruzheniy* [Rigidity of reinforced concrete beams in finite-element calculation models of frame structures]. *Sovremennoe stroitel'stvo i arkhitektura – Modern Construction and Architecture*, 2019, no. 1 (13), pp. 19–25.