

УДК 69.04

© Г. И. Белый, д-р техн. наук, профессор
© М. О. Лобовский, аспирант
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: office@erkon.ru, lobovskiy.m@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-2-18-29

© G. I. Belyy, Dr. Sci. Tech., Professor
© M. O. Lobovskiy, post-graduate student
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: office@erkon.ru, lobovskiy.m@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕТВЕЙ РЕШЕТЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

STABILITY OF BRANCHES OF LATTICE ELEMENTS OF STEEL STRUCTURES

Получено решение задачи общей устойчивости решетчатого стержня с учетом обеспечения устойчивости ветви между узлами решетки (местной устойчивости) в аналитической форме, что является удобным в практическом применении. Оно позволяет учитывать влияние дефектов и повреждений, а также расцентровку узлов решетки на общую устойчивость сквозного стержня. Показано, что при условной гибкости ветви $\lambda_{yb} \geq 2$ снижение общей устойчивости может оказаться существенным. Двухветвевые стержневые элементы, выделенные из конструкции по расчетной длине из плоскости решетки, практически всегда оказываются загруженными в плоскости решетки с различными значениями продольной силы и изгибающего момента на их концах. Следовательно, продольные усилия в наиболее нагруженных из плоскости решетки ветвях всегда будут переменными. Использование фактической схемы нагружения в решении задачи устойчивости ветви позволило вскрыть весьма существенные резервы несущей способности. Решение выполнено обратным численно-аналитическим методом, который позволяет практически в несколько секунд выполнить расчет. Скорость решения зависит от количества необходимых для поиска решений итераций, используемого механизма «удержания» постоянным значения относительно малых (присущих ветвям) эксцентриситетов продольной силы.

Ключевые слова: решетчатый стержневой элемент, общая устойчивость, местная устойчивость, устойчивость ветви из плоскости решетки, приведенная гибкость, упругопластические деформации, обратный численно-аналитический метод.

There has been obtained a solution of the problem of the general stability of the lattice rod, taking into account the stability of the branch between the lattice nodes (local stability) in an analytical form, which is convenient in practical application. It allows taking into account the impact of defects and damages, as well as the misalignment of the lattice nodes on the overall stability of the through rod. It is shown, that with conditional flexibility of the branch $\lambda_{yb} \geq 2$, the decrease in overall stability may be significant. Two-branched rod elements isolated from the design according to the calculated length from the lattice plane are almost always loaded in the lattice plane with different values of longitudinal force and bending moment at the ends. Consequently, the longitudinal forces in the branches most loaded from the lattice plane will always be variable. The use of the actual loading scheme in solving the stability problem allows revealing very significant reserves of load-bearing capacity. The solution is obtained by means of the inverse numerical-analytical method, which allows performing the calculation in almost a few seconds. The speed of the solution depends on the number of iterations necessary to find solutions, the mechanism used to «hold» the values of relatively small (inherent in the branches) eccentricities of the longitudinal force constant.

Keywords: lattice rod element, general stability, local stability, stability of a branch from the lattice plane, reduced flexibility, elastic-plastic deformations, inverse numerical-analytical method.

Исследования устойчивости решетчатых (сквозных) стержней С. П. Тимошенко [1], Б. М. Броуде [2], В. И. Трофимова [3], Н. С. Стрелецкого [4], А. Р. Ржаницына [5] и др. позволили обосновать практический метод их расчета, по форме соответствующий аналогичному расчету сплошностенчатых стержней. При этом влияние деформаций сдвига компенсируется увеличением длины стержня, по которой определяется его приведенная гибкость. Результаты исследований предельных состояний трехгранных [6–8], четырехгранных [2, 9–11] и двухветвевых [2, 12–14] стержней позволили уточнить основные расчетные положения. Среди зарубежных авторов, исследования которых были направлены на совершенствование методов расчета решетчатых стержней, следует отметить труды [15–18].

Таким образом был разработан практический метод расчета сквозных элементов стальных конструкций на местную (ветвей в плоскости решетки) и общую устойчивость¹, который, как заметил В. В. Горев [19], содержит внутренние противоречия. Проверка общей устойчивости предполагает наличие искривления ветви между узлами решетки, а проверка местной устойчивости отрицает ее. Это не гарантирует обеспечения устойчивости ветвей при проверке общей устойчивости в плоскости решетки. В первой части настоящей статьи предлагается аналитическое решение задачи устойчивости решетчатых элементов, лишённое указанного недостатка.

Устойчивость ветвей из плоскости решетки (двухветвевые элементы) согласно СП 16.13330.2017¹ проверяется по максимальной продольной силе; в подавляющем числе случаев, как известно, она переменна по длине ветви. Учет последнего позволит вскрыть определенные резервы несущей способности, чему и посвящена вторая часть настоящего исследования.

¹ СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81 (с поправками, с изм. № 1–4). М.: Стандартинформ, 2017. 139 с.

1. Обеспечение устойчивости ветви при проверке общей устойчивости решетчатого стержня

Анализируя изложенное, В. В. Горев [19–21] предложил метод расчета по деформированной схеме, не требующий их отдельной проверки, который рекомендовано выполнять по формуле

$$\frac{N}{\Phi_e^* \Phi_{yB} AR_y \gamma_c} \leq 1, \quad (1)$$

где N — продольная сила; Φ_{yB} — коэффициент устойчивости ветви в плоскости, параллельной решетке; Φ_e^* — коэффициент общей устойчивости, принимаемый по табл. Д.4 СП 16.13330.2017¹ в зависимости от скорректированного коэффициентом Φ_{yB} условной приведенной гибкости $\bar{\lambda}_{ef}^* = \bar{\lambda}_{ef} \sqrt{\Phi_{yB}}$ ($\bar{\lambda}_{ef} = \lambda_{ef} \sqrt{R_y / E}$) и относительного эксцентриситета $m_y = e_x^0 a / i_y^2$ (a — расстояние от главной свободной оси сечения, перпендикулярной плоскости изгиба, до оси наиболее сжатой ветви); $e_x^0 = M_y / N$; $i_y^2 = I_y / A$.

В. В. Горев [19] вместо одного коэффициента общей устойчивости, соответствующего расчету по СП 16.13330.2017¹, предложил произведение двух: Φ_e^* — коэффициента общей устойчивости по уточненной гибкости и Φ_{yB} — коэффициента местной устойчивости. Следует заметить, что использование в общем решении Φ_{yB} позволяет учитывать влияние дефектов и повреждений ветви на общую устойчивость.

Практика расчета бездефектных элементов по (1) показала, что предложенный метод [19–21] может существенно занижать фактическую устойчивость решетчатых элементов.

Учитывая изложенное, в работе [22] предложен новый метод деформационного расчета решетчатых стержней, лишённый указанного недостатка. Следуя ему, проверка общей устойчивости с учетом обеспечения устойчивости ветви выполняется по традиционной формуле с заменой Φ_e на $\Phi_{e,d}$:

$$\frac{N}{\Phi_{e,d} AR_y \gamma_c} \leq 1, \quad (2)$$

где

$$\varphi_{e,d} = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{a}}; \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\bar{\lambda}_{ef}^2}{\pi^2 \varphi_{yB}} \left[1 - \left(m_y^0 + m_{y\Phi}^0 \frac{\varphi_{yB} - 0,8}{0,2} \right) 0,2337 \right]; \\ b &= \left[1 + \left(m_y^0 + m_{y\Phi}^0 \frac{\varphi_{yB} - 0,8}{0,2} \right) \right] \varphi_{yB}^{-1} + \frac{\bar{\lambda}_{ef}^2}{\pi^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$m_{y\Phi}^0 = 0,008 + 0,037\bar{\lambda}_{ef}$ — относительный эксцентриситет, компенсирующий физическую нелинейность, которая, согласно унифицированной диаграмме работы стали, проявляется от предела пропорциональности $\bar{\sigma}_{пл} = \sigma_{пл} / R_y = 0,8$ до предела текучести $\bar{\sigma}_T = 1,0$ (рис. 4). При $\varphi_{yB} < 0,8$ принимается $m_{y\Phi}^0 = 0$.

Из (4) видно, что коэффициент общей устойчивости $\varphi_{e,d}$ находится в зависимости от устойчивости ветви (в (4) коэффициент φ_{yB}), что также позволяет учитывать влияние дефектов и повреждений и расцентровку узлов решетки на общую устойчивость сквозного стержня.

Достоверность предложенного решения проверим на сопоставлении $\varphi_{e,d}$, полученного по (3) при $\varphi_{yB} = 1$, с φ_e по табл. Д.4 СП16.13330.2017¹. В таблице приведены такие данные, которые свидетельствуют о достаточной в практическом применении точности предложенного решения (3).

Таким образом, используя унифицированную диаграмму работы стали и модель упругого стержня с компенсирующим развитие пластических деформаций догрузением моментом ($m_{y\Phi}^0 = 0,008 + 0,037\bar{\lambda}_{ef}$), получено решение деформационной задачи решетчатого

стержня в аналитической форме (3), что является удобным в практическом применении.

Влияние φ_{yB} на общую устойчивость решетчатого стержня проиллюстрируем на примерах расчета $\varphi_{e,d}$ в зависимости от m_y^0 и $\bar{\lambda}_{ef}$, которые сопоставим с φ_e по табл. Д.4 СП16.13330.2017¹. На рис. 1 сплошными и штрихпунктирными линиями показаны такие зависимости, из которых следует, что обеспечение устойчивости ветви в рамках проверки общей устойчивости может приводить к существенному снижению несущей способности, определяемой по СП16.13330.2017¹. Если при больших значениях $\varphi_{yB} = 0,948$ ($\bar{\lambda}_{yB} = 1$) (см. сплошные линии на рис. 1) для стержней гибкостью $\bar{\lambda}_{ef} \leq 3$ наблюдается незначительное снижение общей устойчивости, находящееся в пределах 2,4...6,1 %, то с уменьшением устойчивости ветви $\varphi_{yB} = 0,826$ ($\bar{\lambda}_{yB} = 2$) (см. штрихпунктирные линии на рис. 1) общая устойчивость снижается на 15,5 % (см. $\varphi_{e,d} / \varphi_e$ при $\bar{\lambda}_{ef} = 2$, $m_y^0 = 4$).

На рис. 1 пунктирными линиями показаны такие сопоставления результатов, полученных по методу [19] $\varphi_{e\varphi_{yB}}^*$ с φ_e при обеспечении устойчивости ветви с $\varphi_{yB} = 0,826$. Видно, что метод, изложенный в [19], неоправданно занижает общую устойчивость. Снижение значений $\varphi_{e\varphi_{yB}}^* / \varphi_e$ относительно $\varphi_{e,d} / \varphi_e$ наблюдается по мере увеличения гибкости $\bar{\lambda}_{ef}$ при малых эксцентриситетах $m_y^0 = 0,5...2,0$, что соответствует занижению фактической несущей способности на 1,6...12,6 %.

В заключение отметим, что предложенное решение (3) построено при использовании

Сопоставление коэффициентов $\varphi_{e,d}$ при $\varphi_{yB} = 1$ по формуле (3) с нормативным значением $\varphi_e / \varphi_{e, cn}$

Условная приведенная гибкость $\bar{\lambda}_{ef}$	Относительный эксцентриситет m_x							
	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4	8
1	0,990	0,982	0,981	0,986	0,974	0,994	0,987	1,002
2	1,000	1,004	1,002	0,997	0,996	0,983	0,996	0,990
3	1,006	1,012	1,007	1,005	1,002	0,999	1,006	0,989
4	0,979	1,006	1,012	1,009	1,011	1,014	1,019	0,985
5	0,966	0,991	1,011	1,012	1,021	1,012	1,020	

рекомендуемой СП16.13330.2017¹ схемы загрузки, выделенного из конструкции по расчетной длине решетчатого стержня, загруженного продольной силой с равными концевыми эксцентриситетами, соответствующими максимальному значению изгибающего момента. При этом предполагается, что последний незначительно изменяется по длине стержня. В противном случае «нормативная»¹ проверка общей устойчивости всегда будет выполняться с некоторым запасом, при котором значение деформационного усилия в ветви может оказаться не превышающим определяемого по условиям «нормативной»¹ устойчивости ветви.

2. Устойчивость ветвей из плоскости решетки при переменной продольной силе

подавляющее большинство двухветвевых стержней, выделенных из конструкций по расчетной длине из плоскости решетки, длина которых равна, как правило, фактической длине l , загруженных продольной силой N^0 ,

имеет различные значения изгибающих моментов $M_y(0)$ и $M_y(l)$, действующих на их концах. Следовательно, продольные усилия в наиболее нагруженных ветвях всегда окажутся переменными. Расчет на устойчивость ветвей с учетом фактического их нагружения позволит вскрыть определенные резервы несущей способности.

Учитывая изложенное, продольные усилия в наиболее нагруженной ветви представим в виде

$$N_B(z) = N_B^0 + q_B^0 z, \quad (5)$$

где $N_B^0 = N_{B,\min}$ — меньшее из двух значений продольной силы в наиболее напряженной ветви $N_B(0)$ и $N_B(l)$, определяемых по соответствующим комбинациям усилий, действующих на концах решетчатого стержня; $q_B^0 = (N_{B,\max} - N_{B,\min})l^{-1}$ — равномерно распределенная вдоль оси ветви нагрузка.

С целью практического применения рассмотрим ветвь колонны, загруженную продольной силой $N_B^0 = \text{const}$, действующей

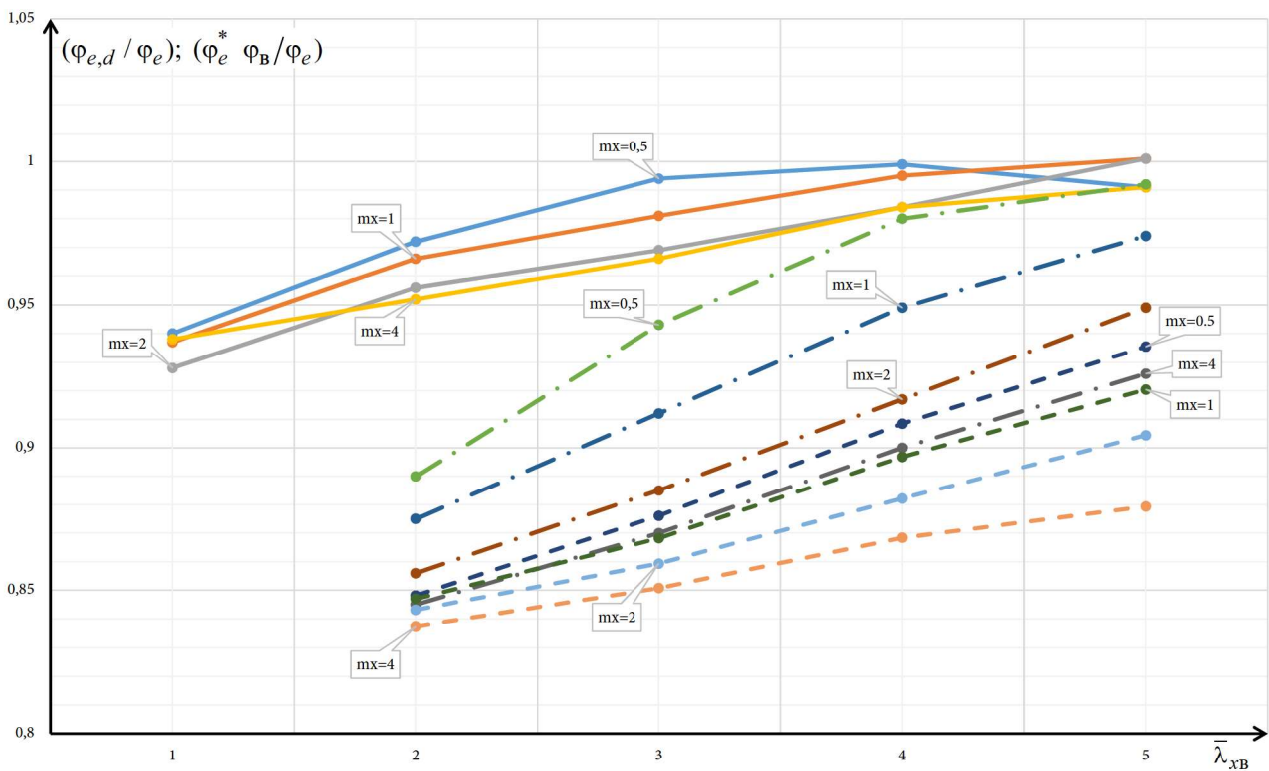


Рис. 1. Сопоставление коэффициентов общей устойчивости $\varphi_{e,d}$ и $\varphi_e^* \varphi_B$ с φ_e по СП 16.13330.2017 в зависимости от $\bar{\lambda}_{XB}$

с конечным эксцентриситетом e_y^0 в сочетании с равномерно распределенной осевой нагрузкой $q_B^0 = \text{const}$ (рис. 2).

Дифференциальное уравнение равновесия ветви согласно [23] примет вид:

$$EI_{x,B} \vartheta^{IV} + N_B^0 \vartheta^{II} + q_B^0 (\vartheta^I + z \vartheta^{II}) = 0. \quad (6)$$

Решение деформационной задачи будем проводить в виде комбинации частных решений [24]

$$\vartheta(\bar{z}) = \vartheta_H(\bar{z}) + \vartheta_{y1}(\bar{z}) + \vartheta_{y2}(\bar{z}). \quad (7)$$

Первый член в (7) представляет собой решение задачи по недеформированной расчетной схеме

$$\vartheta_H(\bar{z}) = V_H \psi_H(\bar{z}), \quad (8)$$

где $V_H = \frac{N_B^0 l^2}{6EI_{x,B}} e_y^0$; $\psi_H(\bar{z}) = 3(\bar{z} - \bar{z}^2)$; $\bar{z} = z/l$.

Второй и третий члены являются функциями потери устойчивости ветви при действии $N_B(z) = N_B^0 + q_B^0 z$:

$$\vartheta_{y1} = V_{y1} \sin \pi \bar{z}; \quad \vartheta_{y2} = V_{y2} \sin 2\pi \bar{z}, \quad (9)$$

где V_{y1}, V_{y2} — некоторые неизвестные константы, имеющие размерность перемещений с точностью, до которой решаются бифуркационные задачи устойчивости.

Для определения последних в (6) подставим общее решение (7), в результате чего получим:

$$L = EI_{x,B} (\vartheta_{y1}^{IV} + \vartheta_{y2}^{IV}) + N_B \vartheta^{II} + q_B (\vartheta^I + z \vartheta^{II}) = 0. \quad (10)$$

Анализируя уравнение (10), можно сделать вывод о том, что оно описывает задачу устойчивости стержня с начальным искривлением оси по (8), загруженного $N_B(z)$,

($e_y^0 = 0$) и q_B^0 . Применив к нему процедуру метода Бубнова – Галеркина:

$$\int_0^1 L \cdot \sin \pi \bar{z} d\bar{z} = 0; \quad \int_0^1 L \cdot \sin 2\pi \bar{z} d\bar{z} = 0, \quad (11)$$

получим систему двух алгебраических уравнений, из которых определяем [22]:

$$V_{y1} = V_H \eta_1; \quad V_{y2} = V_H \eta_2, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\pi^5} [K_2 K_3 - 16 K_1 (1 - 0,25 K_4)] / \Delta; \\ \eta_2 &= \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\pi^5} [K_1 K_3 - K_2 (1 - K_4)] / \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$K_1 = 12(2 + n_g); \quad K_2 = -12n_g;$$

$$K_3 = \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\pi^2} 0,45n_g; \quad K_4 = \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\pi^2} (1 + 0,5n_g);$$

$$n_g = q_B^0 l / N_B^0; \quad \Phi_B = N_B^0 / R_y A_B;$$

$$\Delta = \tilde{\Phi}_{B,cr1} \cdot \tilde{\Phi}_{B,cr2} \left(1 - \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\tilde{\Phi}_{B,cr1}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{\tilde{\Phi}_{B,cr2}} \right);$$

$$\tilde{\Phi}_{B,cr1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1}; \quad a_1 = \frac{4}{\pi^4} (1 + n_g + 0,2n_g^2);$$

$b_1 = \frac{20}{\pi^2} (1 + 0,5n_g)$; $c_1 = 16$; $\Phi_{B,cr1,2} \cdot \bar{\lambda}_{XB}^2 = \tilde{\Phi}_{B,cr1,2}$ — критические параметры силы N_B^0 в сочетании с действием q_B^0 ; $\bar{\lambda}_{XB} = \frac{l}{i_{XB}} \sqrt{R_y / E}$ — условная гибкость ветви.

Достоверность общего решения (7) с учетом (12), которое принимает вид

$$\vartheta(z) = e_y^0 \frac{\Phi_B \bar{\lambda}_{XB}^2}{6} \times \left[3(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2) + \eta_1 \sin \pi \bar{\lambda} + \eta_2 \sin 2\pi \bar{\lambda} \right], \quad (14)$$

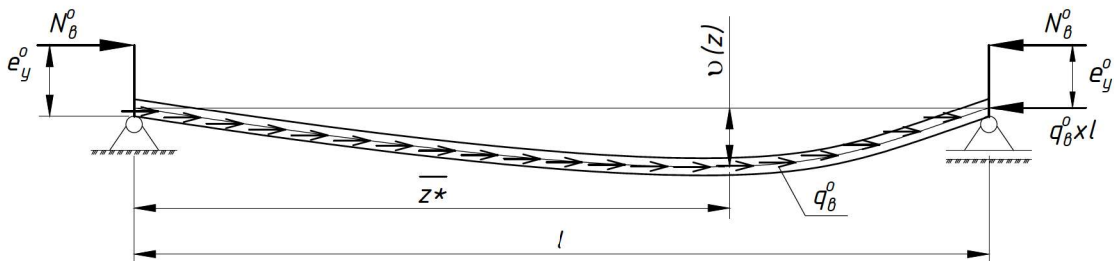


Рис. 2. Расчетная модель ветви в плоскости, перпендикулярной решетке

подтверждается полным совпадением значений критических параметров $\bar{\varphi}_{B,cr1}$ с результатами, полученными С. П. Тимошенко [23].

Учитывая (14), максимальные напряжения $\bar{\sigma}_{max} = \sigma_{max}/R_y$ в наиболее нагруженном сечении $\bar{z} = \bar{z}^*$ можно представить в виде

$$\bar{\sigma}_{max}(\bar{z}^*) = \varphi_B \left[\begin{array}{c} n_g \bar{z}^* + 1 + m_{xB}^0 \times \\ \times \left(1 + \frac{\pi^2}{6} (\eta_1 \sin \pi \bar{z}^* + 4\eta_2 \sin 2\pi \bar{z}^*) \right) \end{array} \right], \quad (15)$$

где $m_{xB}^0 = e_y^0 / \rho_x$ — относительный эксцентриситет; $\rho_x = W_{xB} / A_B$ — ядровое расстояние.

Координата \bar{z}^* определяется по $d\bar{\sigma}_{max}(\bar{z})/d(\bar{z}) = 0$, которое принимает вид:

$$n_g + m_{xB}^0 \frac{\pi^3}{6} (\eta_1 \cos \pi \bar{z} + 8\eta_2 \cos 2\pi \bar{z}) = 0. \quad (16)$$

При упругой работе материала решение задачи устойчивости ветви, (прочности расчетом по деформированной схеме) можно получить при $\bar{\sigma}_{max}(\bar{z}^*) = 1$:

$$\varphi_{yB} (n_g \bar{z}^* + 1 + m_{xB}^0 K_{dx}) = 1, \quad (17)$$

где

$$K_{dx} = 1 + \frac{\pi^2}{6} (\eta_1 \sin \pi \bar{z}^* + 4\eta_2 \sin 2\pi \bar{z}^*) \quad (18)$$

— деформационный коэффициент, учитывающий влияние перемещений (14) на изгибные усилия.

Расчет устойчивости ветви за пределом упругости проведем обратным численно-аналитическим методом [22]. Для этого используем неограниченно упругую ее модель, в наиболее нагруженном сечении $\bar{z} = \bar{z}^*$ которой зададимся i — нагружением продольной силой $N_{B,i}^* (1 + n_g \bar{z}^*)$ с деформационным моментом $M_{x,i}^* (\bar{z}^*)$ (рис. 3). Для обобщения решения последние представим в безразмерных параметрах $\varphi_{B,i}^* (n_g \bar{z}^* + 1)$ и $\varphi_{B,i}^* m_x^*$. Тогда соответствующее им НДС примет вид:

$$\bar{\sigma}_i^* (\bar{y}_k) = \bar{\varepsilon}_i^* (\bar{y}_k) = \varphi_{B,i}^* (n_g \bar{z}^* + 1 + m_x^* \bar{y}_k), \quad (19)$$

где

$$\varphi_{B,i}^* = N_{B,i}^* / R_y A_B = \bar{\varepsilon}_{max,i} (n_g \bar{z}^* + 1 + m_x^*)^{-1}; \quad (20)$$

$\bar{\varepsilon}_{max,i} = \varepsilon_{max,i} E / R_y$ — деформация наиболее напряженного волокна с координатой y_* ; $\bar{y}_k = y_k / y_*$.

При этом напомним, что устойчивость определяется при переходе из равновесного в неравновесное состояние стержня, поэтому обратное решение деформационной задачи, в зависимости от гибкости стержня, следует принимать при ряде значений деформаций наиболее напряженного волокна в указанном сечении ($1 \leq \bar{\varepsilon}_{max,i} \leq 4$) с целью поиска наибольшего параметра загрузки φ_{max}^* — коэффициента потери устойчивости.

По заданному деформированному состоянию в сечении $\bar{z} = \bar{z}^*$ (19), соответствующему i -му нагружению, с помощью алгоритма «Сечение» с использованием унифицированной диаграммы работы стали $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ (см. рис. 4) определяем фактически действующие усилия:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{B,i} = \varphi_{B,i}^* \left[(n_g \bar{z}^* + 1) \bar{A}_{ef} - m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c \right]; \\ m_x = \frac{\varphi_{B,i}^*}{\varphi_{B,i}} \left[-(n_g \bar{z}^* + 1) \bar{y}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,ef}^2 \right], \end{array} \right\} \quad (21)$$

где

$$\bar{A}_{ef} = \sum_{k=1}^n \bar{E}_{ck} \cdot \Delta \bar{A}_k; \quad \bar{y}_c = \sum_{k=1}^n \bar{E}_{ck} \cdot \bar{y}_k \cdot \Delta \bar{A}_k;$$

$\bar{i}_{x,ef}^2 = \sum_{k=1}^n \bar{E}_{ck} \cdot \bar{y}_k^2 \cdot \Delta \bar{A}_k$; $\bar{E}_{ck} = \text{tg } \alpha_k$ — относительный секущий модуль (см. рис. 4); n — число достаточно малых дискретных площадок ΔA_k с координатами центра тяжести y_k (см. рис. 3); $\Delta \bar{A} = \frac{\Delta A_k}{A}$; $\bar{A}_{ef} = \frac{A_{ef}}{A}$; $\bar{y}_k = y_k / \rho_x$.

И фиктивные усилия, компенсирующие развитие пластических деформаций:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_{B,\Phi i} = \varphi_{B,i}^* \left[(n_g \bar{z}^* + 1) \bar{A}_{oc} + m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c \right]; \\ m_{x,\Phi} = \frac{\varphi_{B,i}^*}{\varphi_{B,\Phi i}} \left[(n_g \bar{z}^* + 1) \bar{y}_c + m_x^* \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,oc}^2 \right], \end{array} \right\} \quad (22)$$

где $\bar{A}_{oc} = 1 - \bar{A}_{ef}$; $\bar{i}_{x,oc}^2 = \frac{I_{xB}}{\rho_x^2 A_B} - \bar{i}_{x,ef}^2$.

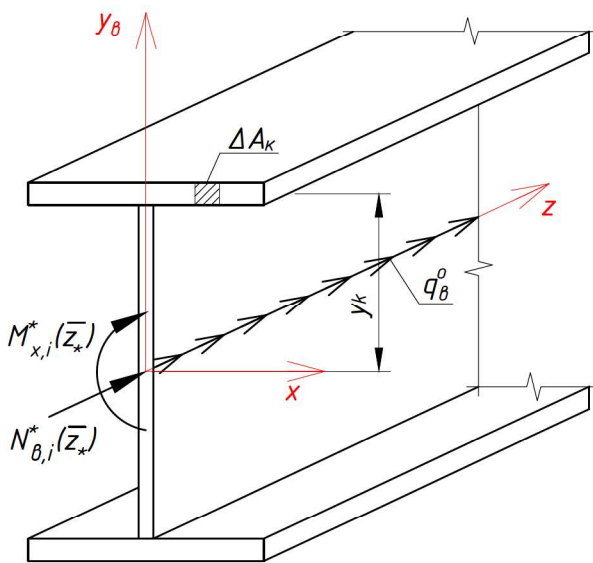


Рис. 3. Загружение ветви в сечении $\bar{z} = \bar{z}_*$

Полученное выражение $\varphi_{B,i}$ в (21) позволяет определить продольную силу $N_{B,i}^0 = \varphi_{B,i} A_B R_y$, действующую совместно с равномерно распределенной осевой нагрузкой $q_{B,i}^0 = n_g N_{B,i}^0 / l$. При этом фиктивную силу с параметром $\varphi_{B,\Phi}$ по (22) в запас несущей способности примем постоянной по длине ветви, тогда ее относительный эксцентриситет на опорах $m_{x,\Phi}$ можно определить по (22).

Учитывая изложенное, можно констатировать, что неизвестным остается только относительный эксцентриситет силы $N_{B,i}^0$ на опорах m_x^0 . Для его определения рассмотрим напряженное состояние в сечении $\bar{z} = \bar{z}_*$ при действии $N_{B,i}^0$ и $N_{B,\Phi}^0$, которое в безразмерных параметрах, соответствующих (19), представим в виде [22]:

$$\bar{\sigma}^*(\bar{y}) = \varphi_{B,i} (n_g \bar{z}_* + 1 + m_x^0 \bar{y} K_{d,xi}) + \varphi_{B,\Phi} (n_g \bar{z}_* + 1 + m_{x,\Phi}^0 \bar{y} K_{d,xi}), \quad (23)$$

где $K_{d,xi} = 1 + \frac{\pi^2}{6} (\eta_{1,i} \sin \pi \bar{z}_* + 4\eta_{2,i} \sin 2\pi \bar{z}_*)$ (24) — коэффициент, учитывающий влияние перемещений ϑ на усилия; $\eta_{1,i}$ и $\eta_{2,i}$ — коэффициенты, определяемые по (13).

Тогда при $\bar{\sigma}_{\max,i}^* = \bar{\epsilon}_{\max,i}^*$ получим

$$m_x^0 = \frac{\bar{\epsilon}_{\max,i}^* - \varphi_{B,i} (1 + n_g \bar{z}_*)}{\varphi_{B,i} K_{d,xi}} - \frac{\varphi_{B,\Phi} m_{x,\Phi}^0}{\varphi_{B,i}}. \quad (25)$$

Таким образом, по заданному i -му деформированному состоянию в наиболее нагруженном сечении $\bar{z} = \bar{z}_*$ неограниченно упругого стержня $\bar{\epsilon}_{\max,i}^* = 0,8 + \Delta \bar{\epsilon} \cdot i$, $\Delta \bar{\epsilon}_i = 3,2 / n (i = 1, 2, \dots, n)$ при действии продольной силы с деформационным относительным эксцентриситетом m_x^* обратным численно-аналитическим методом расчета можно определить соответствующее загрузке ветви с параметрами $\varphi_{B,i}$ и m_x^0 ($q_{B,i}^0 = n_g \varphi_{B,i} A_B R_y / l$). Рассматривая деформированные состояния при ряде значений $\bar{\epsilon}_{\max,i}^* (i = 1, 2, \dots, n)$ с удержанием значения $m_x^0 = \text{const}$, определяем наибольший параметр общего загрузке φ_{\max} , соответствующий коэффициенту потери устойчивости.

Использование предложенной модели внецентренно сжатой ветви силой N_B^0 , догруженной равномерно распределенной вдоль оси нагрузкой q_B^0 , и разработанного в [22] математического аппарата позволяет выполнить ее расчет за несколько секунд. Скорость решения в основном зависит от количества необходимых для поиска решения итераций, определяемого использованием механизма «удержания» постоянными значения относительного эксцентриситета m_x^0 . В работе [25] проиллюстрирован такой механизм.

Резервы несущей способности фактически загруженной внецентренно сжатой ветви ($N_B(z) = N_B^0 + q_B^0 z$, $M_{x,B}^0 = N_B^0 e_y^0$) определим сопоставлением результатов расчета по предложенному методу [22] на устойчивость $\varphi_B(n_g + 1)$ и на прочность в наиболее нагруженном опорном сечении с результатами расчета по «нормативному»¹ методу ($N_B^0 + q_B^0 l = \text{const}$, $M_{x,B}^0 = (N_B^0 + q_B^0 l) e_y^0$) по устойчивости φ_e (см. табл. Д.3 СП16.13330.2017¹). Сопоставление $\varphi_B(n_g + 1) / \varphi_e$ приведено на примерах расчета двутавровой ветви (см. рис. 3) с $\frac{A_f}{A_w} = 0,84$ (A_f и A_w — площади поперечного сечения полки и стенки соответственно) в зависимости от $n_g = q_B^0 l / N_B^0$, относительно-

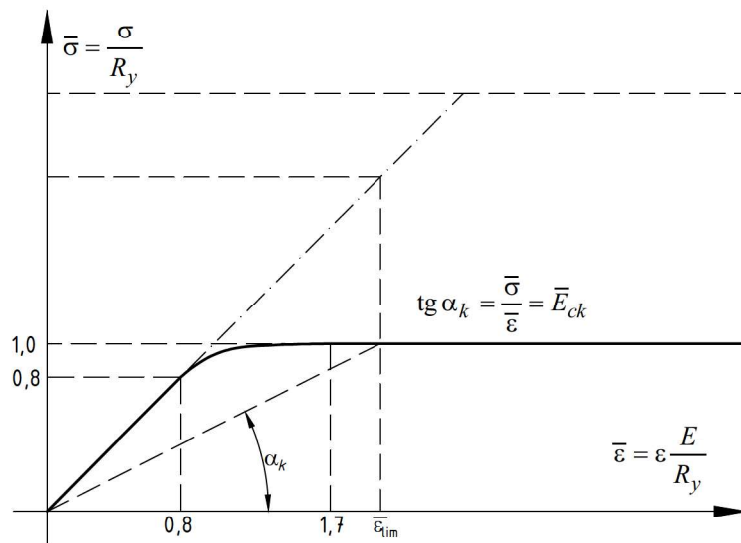


Рис. 4. Унифицированная диаграмма работы стали

го эксцентриситета $m_{x,b}^0$ и условной гибкости $\bar{\lambda}_{x,b}$.

На графиках (рис. 5) показаны такие зависимости при $n_{g1} = 0,5$, $n_{g2} = 1$ и $n_{g3} = 1,5$, соответственно, и малых (присущих ветвям) относительных эксцентриситетах $m_{x,b}^0 = 0,1 \dots 1,0$ от $\bar{\lambda}_{x,b}$, на которых сплошными и точечными линиями характеризуются отношения устойчивости ветви, а штрихпунктирными — ее прочности, к «нормативной»¹ устойчивости. Видно, что по мере увеличения $n_g = q_b^0 l / N_b^0$ при малых и средних значениях гибкости $\bar{\lambda}_{x,b}$ фактическая несущая способность преимущественно определяется прочностью (см. штрихпунктирные и обозначенные точками линии на рис. 5). Устойчивость становится определяющей только для ветвей средних и больших гибкостей $\bar{\lambda}_{x,b} = 2,5 \dots 5$ при $m_{x,b}^0 = 0,5$ (см. сплошные линии).

Анализируя полученные результаты, можно констатировать, что использование фактической схемы загрузки двутавровых ветвей позволяет вскрыть резервы несущей способности в зависимости от m_x^0 и $\bar{\lambda}_{x,b}$: при $n_{g1} = 0,5$ — от 5 до 22 %, при $n_{g2} = 1$ — от 9 до 47 %, при $n_{g3} = 1,5$ — от 10 до 55 %.

Достоверность предложенного решения подтверждается, как это уже упоминалось,

полным совпадением критических параметров продольной силы N_b^0 в сочетании с распределенной нагрузкой q_b^0 (решение бифуркационной задачи устойчивости) с данными, полученными в работах С. П. Тимошенко [23] и при использовании общего аналитического решения деформационных задач [24], а также хорошим согласованием (различия составляют не более 2...3 %) результатов расчета при $q_b^0 = 0$ с φ_e по табл. Д.3 СП 16.13330.2017¹.

Выводы

1. Исследовано влияние устойчивости ветви между узлами решетки (местной устойчивости) на общую устойчивость сквозных элементов стальных конструкций. Решение задачи проводится аналитическим методом [22] в безразмерных параметрах, что является удобным в практическом применении.

Установлены закономерности снижения общей устойчивости в зависимости от местной устойчивости ветви. Показано, что при гибкости ветви $\bar{\lambda}_{y,b} \geq 2$ снижение общей устойчивости может оказаться существенным.

2. Использование фактической схемы загрузки ветви из плоскости решетки про-

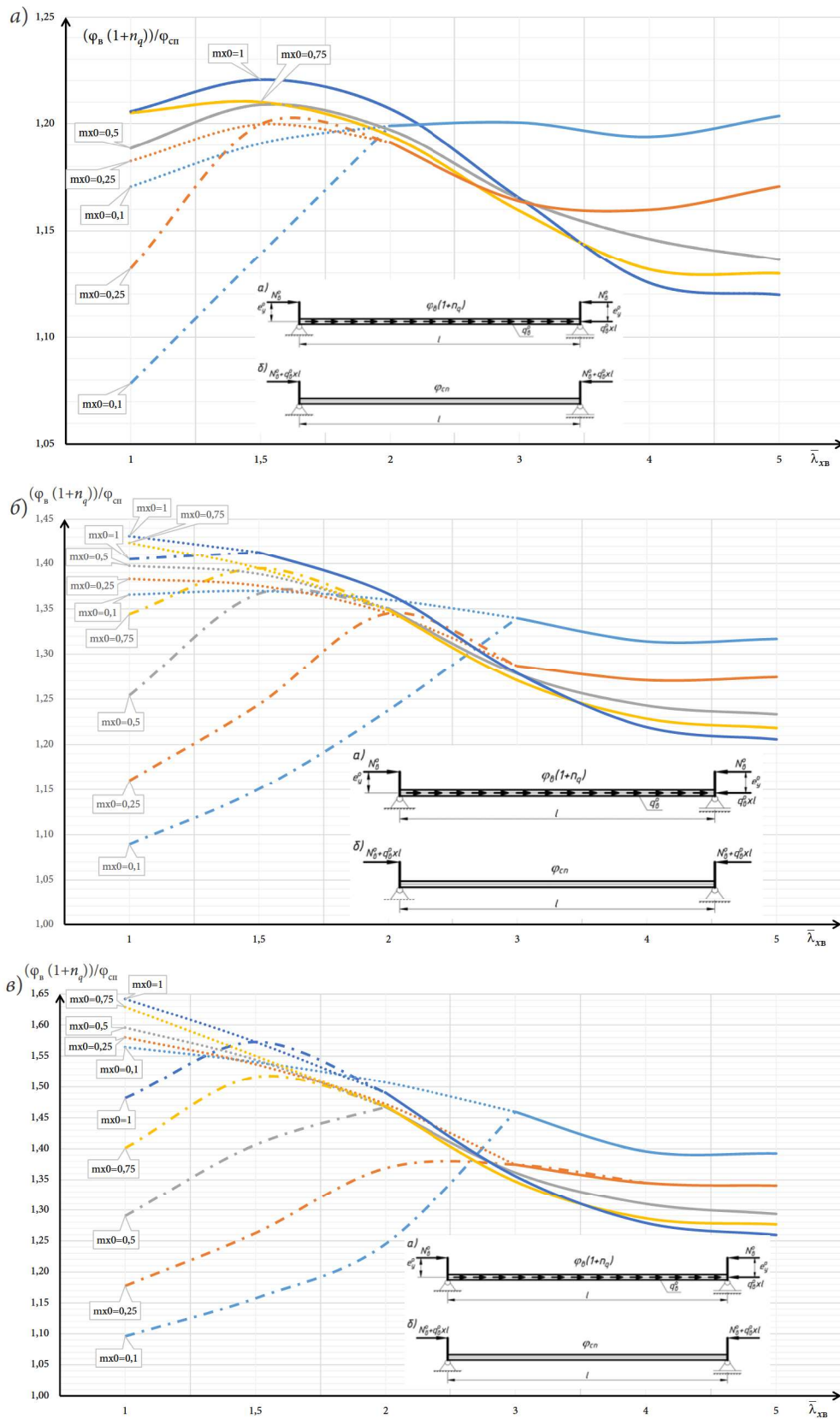


Рис. 5. Графики зависимости $\frac{\varphi_B(1+n_q)}{\varphi_{сн}}$ от λ_B при $n_q = q^0/N_B^0 = 0,5; 1; 1,5$ (а, б, в соответственно)

дольной силой N_B^0 , действующей с относительно малыми (присущими ветви) эксцентриситетами, в сочетании с равномерно распределенной осевой нагрузкой q_B^0 , в решении задачи устойчивости обратным численно-аналитическим методом позволяет вскрыть весьма существенные резервы несущей способности.

Библиографический список

1. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 807 с.
2. Броуде Б. М. Об устойчивости составных стержней с планками // Строительная механика и расчет сооружений. 1966. № 6. С. 24–26.
3. Трофимов В. И. Исследование работы решетчатой мачты типа опоры линии электропередач прямоугольного сечения на действие крутящего момента // Труды ин-та ЦНИИПСК. 1961. № 5. С. 44–60.
4. Стрелецкий Н. С. Материалы к курсу стальных конструкций. Вып. 2. М.: Госстройиздат, 1959. Т. 1: Работа сжатых стоек. 284 с.
5. Ржаницын А. Р. Расчет составных стержней в состоянии предельного равновесия // Строительная механика и расчет сооружений. 1967. № 5. С. 27–30.
6. Бельский Г. Е. К расчету трехгранных составных стержней на планках // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1981. № 1. С. 14–19.
7. Трофимов В. И. Исследование устойчивости трехгранных сквозных стержней // Исследования по стальным конструкциям: труды ин-та ЦНИИПСК. М., 1962. Вып. 13. С. 173–199.
8. Кондрахов Е. И. Экспериментальные исследования на центральное сжатие трехгранных стержней из сплавов Д1-Т с соединениями на черных болтах // Строительные конструкции из алюминиевых сплавов. М.: ЦНИИСК, 1963. Вып. 2. С. 203–213.
9. Горев В. В. Устойчивость центрально сжатых составных стержней при упругой работе // Исследования по строительным конструкциям: сб. науч. тр. Томск: Томский ИСИ, 1964. Т. XI. С. 71–82.
10. Трофимов В. И. Исследование и расчет элементов стальных опор линий электропередачи. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959. 103 с.
11. Трофимов В. И. О расчете на устойчивость составного четырехгранного стержня на планках // Строительная механика и расчет сооружений. 1963. № 2. С. 41–44.
12. Незальзов О. Р., Ковтун-Горбачева Т. А. Определение приведенной гибкости безраскосных колонн из гнутосварных прямоугольных труб // Металлические

конструкции и испытания сооружений: межвуз. тематич. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1979. С. 137–142.

13. Попов Н. Г. Об устойчивости плоских симметричных многоэтажных рам // Строительство: науч. докл. высшей школы. 1959. № 2. С. 79–91.
14. Степанов Б. П. Некоторые вопросы теории расчета регулярных ферм, рам и систем со сквозными элементами: дис. ... канд. техн. наук. Саратов, 1976. 156 с.
15. Crawford R. F., Benton M. D. Strength of initially wavy lattice columns // AIAA Journal. 1980. Vol. 18. № 5. Pp. 581–584.
16. Grochowski Ireneusz. O obliczaniu naprężeń drugorzędnych wielogaleziowych pretach Kratowych // Inz. i bud. 1980. Vol. 35. № 4. Pp. 134–137.
17. Holla V. K., Prathap G., Varadan T. K. Effect of shear deformation on post-buckling behavior of columns // Int. J. Numer. Math. Eng. 1980. Vol. 15. № 2. Pp. 302–307.
18. Ramm W., Uhlmann W. Zur Anpassung des Stabilitäts Nachweises für mehrtteilige Druckstäbe an das europäische Nachweiskonzept // Stahlbau. 1981. № 6. S. 161–172.
19. Горев В. В. Разработка общей методики статического расчета сжатых решетчатых металлических конструкций и совершенствование их конструктивной формы: дис. ... д-ра техн. наук. Липецк, 1985. 403 с.
20. Горев В. В. Влияние двухосного эксцентриситета на работу сквозных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 4. С. 30–33.
21. Горев В. В. Общая устойчивость сжатых сквозных стержней // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1983. № 1. С. 39–40.
22. Белый Г. И. Расчет на устойчивость решетчатых элементов стальных конструкций // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 10. С. 1347–1357. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1347-1357.
23. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Изд. 2-е. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 567 с.
24. Белый Г. И. О расчете упругих стержней по деформированной схеме при действии активных и параметрических нагрузок. Механика стержневых систем и сплошных сред // Сб. науч. тр. ЛИСИ. 1980. № 32. С. 41–48.
25. Белый Г. И., Гарипов А. И. Запредельные напряженно-деформированные состояния в поперечных сечениях элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2022. № 4 (93). С. 16–30.

References

1. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' stержney, platin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 807 p.

2. Broude B. M. *Ob ustoychivosti sostavnykh sterzhney s plankami* [On the stability of composite rods with slats]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Calculation of Structures*, 1966, no. 6, pp. 24–26.
3. Trofimov V. I. *Issledovanie raboty reshetchatoy machty tipa opory linii elektroperechach pryamougol'nogo secheniya na deystvie krutyashchego momenta* [Investigation of lattice mast of transmission line support type of rectangular section on the action of torsion momentum]. *Trudy in-ta TsNIIPSK – Proceedings of the Central Research Institute of the Russian Academy of Natural Resources and Industrial Safety*, 1961, no. 5, pp. 44–60.
4. Streletskiy N. S. *Materialy k kursu stal'nykh konstruksiy* [Materials to the course of steel structures]. Iss. 2. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1959, vol. 1, *Rabota szhatykh stoek* [Performance of compressed struts], 284 p.
5. Rzhانيتsyn A. R. *Raschet sostavnykh sterzhney v sostoyanii predel'nogo ravnovesiya* [Calculation of composite rods in the state of limiting equilibrium]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Calculation of Structures*, 1967, no. 5, pp. 27–30.
6. Bel'skiy G. E. *K raschetu trekhgrannykh sostavnykh sterzhney na plankakh* [To the calculation of trihedral composite rods on bars]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura – Bulletin of higher schools. Construction and architecture*, 1981, no. 1, pp. 14–19.
7. Trofimov V. I. *Issledovanie ustoychivosti trekhgrannykh skvoznykh sterzhney* [Investigation of stability of trihedral through rods]. *Trudy TsNIIPSK «Issledovaniya po stal'nykh konstruksiyam* [Proceedings of the ZNIIPSK “Investigations on Steel Structures”]. Moscow, 1962, iss. 13, pp. 173–199.
8. Kondrakhov E. I. *Eksperimental'nye issledovaniya na tsentral'noe szhatie trekhgrannykh sterzhney iz splavov D1-T s soedineniyami na chernykh boltakh* [Experimental studies on the central compression of trihedral bars from D1-T alloys with connections on black bolts]. *Stroitel'nye konstruksii iz alyuminievyykh splavov – Construction structures of aluminium alloys*, Moscow, TsNIISK Publ., 1963, iss. 2, pp. 203–213.
9. Gorev V. V. *Ustoychivost' tsentral'no szhatykh sostavnykh sterzhney pri uprugoy rabote* [Stability of centrally compressed composite rods during elastic work]. *Trudy «Issledovaniya po stroitel'nykh konstruksiyam»* [Proceedings “Investigations on Building Structures”]. Tomsk, Tomsk ISI Publ., 1964, vol. XI, pp. 71–82.
10. Trofimov V. I. *Issledovanie i raschet elementov stal'nykh opor liniy elektroperechachi* [Research and calculation of elements of steel supports of power transmission lines]. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1959, 103 p.
11. Trofimov V. I. *O raschete na ustoychivost' sostavnogo chetyrekhgrannogo sterzhnya na plankakh* [On the calculation of the stability of a composite tetrahedral rod on planks]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Calculation of Structures*, 1963, no. 2, pp. 41–44.
12. Nezal'zov O. R., Kovtun-Gorbacheva T. A. *Opreделение privedennoy gibkosti bezraskosnykh kolonn iz gnutosvarnykh pryamougol'nykh trub* [Determination of the reduced flexibility of slantless columns of bent-welded rectangular pipes]. *Trudy mezhvuz. tematich. konf. «Metallicheskie konstruksii i ispytaniya sooruzheniy»* [Proceedings of interuniversity sci. conf. “Metallic structures and structural tests”]. Leningrad, LISI Publ., 1979, pp. 137–142.
13. Popov N. G. *Ob ustoychivosti ploskikh simmetrichnykh mnogoetazhnykh ram* [On the stability of flat symmetrical multi-storey frames]. *Stroitel'stvo. Nauch. dokl. vysshey shkoly – Construction. Scientific Papers of Higher School*, 1959, no. 2, pp. 79–91.
14. Stepanov B. P. *Nekotorye voprosy teorii rascheta regulyarnykh ferm, ram i sistem so skvoznymi elementami. Diss. kand. tekhn. nauk* [Some issues of theory of calculating regular trusses, frames and systems with through elements. PhD in Sci. Tech. diss.]. Saratov, 1976, 156 p.
15. Crawford R. F., Benton M. D. *Strength of initially wavy lattice columns*, *AIAA Journal*, 1980, vol. 18, no. 5, pp. 581–584.
16. Grochowski Ireneusz. *O obliczaniu na przeźni drugorzędnych wielogaleziowych pretach Kratowych. Inz. i bud.*, 1980, vol. 35, no. 4, pp. 134–137.
17. Holla V. K., Prathap G., Varadan T. K. *Effect of shear deformation on post-buckling behavior of columns. Int. J. Numer. Math. Eng.*, 1980, vol. 15, no. 2, pp. 302–307.
18. Ramm W., Uhlmann W. *Zur Anpassung des Stabilitäts Nachweises für mehrtteilige Druckstäbe an das europäische Nachweiskonzept. Stahlbau*, 1981, no. 6, pp. 161–172.
19. Gorev V. V. *Razrabotka obshchej metodiki staticheskogo rascheta szhatykh reshetchatykh metallicheskiy konstrukcij i sovershenstvovanie ih konstruktivnoj formy. Diss. dokt. tekhn. nauk* [Development of a general methodology of static calculation of compressed lattice metal structures and improvement of their structural form. Dr. Sci. Tech. diss.]. Lipetsk, 1985, 403 p.
20. Gorev V. V. *Vliyanie dvuhosnogo ekscentrisiteta na rabotu skvoznnykh sterzhney* [Effect of biaxial eccentricity on the performance of through rods]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Design of Structures*, 1978, no. 4, pp. 30–33.
21. Gorev V. V. *Obshchaya ustoychivost' szhatykh skvoznykh sterzhney* [General stability of compressed through rods]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura – Bulletin of higher schools. Construction and architecture*, 1983, no. 1, pp. 39–40.
22. Belyj G. I. *Raschet na ustoychivost' reshetchatykh elementov stal'nykh konstruksiy* [Stability calculation of lattice elements of steel structures]. *Vestnik MGSU –*

Bulletin of MSCU, 2022, vol. 17, iss. 10, pp. 1347–1357.
DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1347-1357

23. Timoshenko S. P. *Ustojchivost' uprugih sistem* [Stability of elastic systems]. 2-nd ed. Moscow, Gos. izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1955, 567 p.

24. Belyj G. I. *O raschete uprugih sterzhnej po deformirovannoj skheme pri dejstvii aktivnyh i parametricheskikh nagruzok* [On the calculation of elastic rods according to a deformed scheme under active and parametric loads]. *Sb.nauch.tr. LISI «Mekhanika*

sterzhnevyyh sistem i sploshnyh sred» [Proceedings of LISI “Mechanics of rod systems and continuous media”]. 1980, no. 32, pp. 41–48.

25. Belyy G. I., Garipov A. I. *Zapredel'nye napryazhenno-deformirovannyye sostoyaniya v poperechnyyh secheniyah elementov stal'nyh konstrukcij* [Post-limit stress-strain states of steel structure elements in cross-sections]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2022, no. 4 (93), pp. 16–30.