

УДК 539.3

DOI 10.23968/1999-5571-2023-20-4-40-45

© В. И. Смирнов, д-р техн. наук, профессор
© С. А. Видюшенков, канд. техн. наук, доцент
(Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, baklava@mail.ru

© V. I. Smirnov, Dr. Sci. Tech., Professor
© S. A. Vidyushenkov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University,
Saint Petersburg, Russia)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, baklava@mail.ru

РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО БРУСА КРУГОВОЙ ФОРМЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

RADIAL OSCILLATIONS OF AN ELASTIC ROD OF CIRCULAR SHAPE UNDER IMPULSE LOADING

Изучается напряженное состояние упругого стержня цилиндрической формы под воздействием равномерно распределенной импульсной нагрузки прямоугольного профиля, приложенной к поверхности. В первой сходящейся волне показан характер изменения радиального напряжения во времени. Результаты расчетов показывают, что, несмотря на то что заданная нагрузка сжимающая, после ее внезапного снятия напряжения в сходящейся волне становятся растягивающими и возрастают по мере продвижения импульса к оси стержня. Задача исследуется при помощи преобразования Лапласа. Решение получено в виде ряда Фурье — Бесселя, который преобразован к асимптотической форме (для малого времени).

Ключевые слова: цилиндрический стержень, радиальные колебания, импульсное нагружение, сходящаяся волна.

The stress state of the cylindrical elastic rod is studied under the influence of a uniformly distributed impulse load of rectangular shape applied to the surface. The first convergent wave shows the nature of the change in radial tension over time. The results of the calculations show that, despite the fact that the given load is compressive, after its sudden removal, the stresses in the converging wave become tensile and increase as they move towards the axis of the rod. The problem is investigated using the Laplace transform. The solution is obtained in the form of Fourier-Bessel series, which is converted to asymptotic form (for short time).

Keywords: cylindrical rod, radial oscillations, impulse loading, convergent wave.

Введение

Многие конструкции современной техники подвергаются действию импульсных нагрузок. Поэтому возникает задача изучения распространения упругих волн в ограниченных объемах и расчета характеристик волнового поля при нестационарном деформировании их поверхностей. Подобная задача ставилась и решалась во многих работах. В данном исследовании проблема рассматривается с точки зрения вы-

явления эффектов фокусировки и динамических прочностных свойств материала. Эффекты фокусировки упругих волн при их схождении к центру шара или оси цилиндра изучались в работах [1–6], акустических волн — в работах [7, 8]. Распространение упругих и акустических волн в сплошном шаре и цилиндре также исследовалось в работах [9–15].

Эксперименты по нагружению шаров из металлов и горных пород ударными сфери-

чески симметричными волнами показали, что при таких воздействиях возможно появление сферической полости в центре шара. Результаты экспериментов содержатся, например, в работах [16–18], а попытка интерпретировать полученные экспериментальные данные сделана в [19].

Методы

Рассмотрим осесимметричные радиальные колебания бесконечно длинного (плоская деформация) упругого бруса кругового сечения при равномерном нагружении его импульсом заданной формы на боковой поверхности. В цилиндрической системе координат (r, Θ, z) введем следующие безразмерные величины:

$$r = \frac{R}{R_0}; t = \frac{c_1 t'}{R_0}; u_r = \frac{(\lambda + 2\mu)u_R}{\sigma_0 R_0};$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_R}{\sigma_0}; \sigma_\Theta = \frac{\sigma_\Phi}{\sigma_0}; \sigma_z = \frac{\sigma_Z}{\sigma_0},$$

где u_r — радиальное смещение; σ_r, σ_Θ и σ_z — соответственно радиальное, окружное и осевое напряжения; R_0 — радиус бруса; λ, μ — константы Ламе; t — безразмерное время; c_1 — скорость продольной волны; σ_0 — амплитуда нагрузки.

Тогда начально-краевая задача может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\sigma_r = -f(t) \text{ при } r=1, u_r = 0 \text{ при } r=0$$

и начальными условиями

$$u_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0 \text{ при } t=0.$$

Напряжения найдем из закона Гюка

$$\sigma_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r}; \sigma_\Theta = \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r};$$

$$\sigma_z = \nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right); \nu = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

К уравнению (1) применим преобразование Лапласа (с параметром s) по времени. В области изображений получим обыкновенное дифференциальное уравнение для

трансформанты смещения

$$\frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}_r}{dr} - \left(s^2 - \frac{1}{r^2} \right) \bar{u}_r = 0. \quad (3)$$

Так как решение ограничено при $r=0$, то физически приемлемым решением уравнения (3) будет

$$\bar{u}_r(r, s) = A(s) \cdot I_1(rs),$$

где $I_1(rs)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка [20, 21]. Постоянную $A(s)$ найдем из преобразованного граничного условия

$$A(s) = \frac{\bar{f}(s)}{[(1-\nu)I_1(s) - sI_0(s)]}.$$

Тогда решением в области изображений будет

$$\bar{u}_r(r, s) = \frac{\bar{f}(s) I_1(rs)}{(1-\nu)I_1(s) - sI_0(s)}. \quad (4)$$

Пусть $f(t) = H(t) - H(t-T)$, где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда [20, 21]; T — длительность импульса. Так как $\bar{f}(r, s) = (1 - e^{-sT})/s$, то решение удобно представить в виде разности двух интегралов

$$u_r(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} G(s) ds - \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} G(s) e^{-sT} ds, \quad (5)$$

$$G(s) = F(s) e^{st}, F(s) = \frac{I_1(rs)}{s[(1-\nu)I_1(s) - sI_0(s)]}.$$

Рассмотрим первый интеграл в (5). Так как разложение функции $I_\nu(s)$ в ряд содержит только целые степени s , то подынтегральная функция $G(s)$ однозначна относительно s и имеет простые полюса в точках $s=0$ и $s=\pm i\omega_n$, $n=1, 2, \dots$; ω_n — положительные корни уравнения

$$(1-\nu)J_1(\omega) - \omega J_0(\omega) = 0, \quad (6)$$

где $J_\nu(\omega)$ — функция Бесселя. Так как при $\omega \rightarrow \infty$

$$J_0(\omega) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \cos\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$J_1(\omega) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right),$$

то корни уравнения (6) можно приближенно определить из равенства

$$(1-\nu) \operatorname{tg}\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда

$$\omega_n \approx \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi = 0. \quad (7)$$

Замкнем контур $L = (\varepsilon - i\infty; \varepsilon + i\infty)$ полуокружностью Γ_R радиуса R в левой полуплоскости. Принимая во внимание (7), положим $R = (n + 1/4) \pi$. В этом случае контур Γ_R не будет проходить ни через один из полюсов подынтегральной функции $G(s)$. При $s \rightarrow \infty$ имеем

$$F(s) \approx \frac{e^{-s(1-r)}}{s(1-v-s)\sqrt{r}}.$$

Отсюда видно, что функция $F(s)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, и, следовательно, интеграл по контуру Γ_R при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Так как полюса подынтегральной функции $G(s)$ лежат внутри замкнутого контура, включающего полуокружность Γ_R и отрезок прямой L , то по теореме Коши первый интеграл в (5) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подынтегральной функции относительно ее полюсов s_k :

$$\int_{\Gamma} G(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} s G(s_k). \quad (8)$$

Определим сначала вычет относительно полюса $s = 0$. Числитель подынтегральной функции $G(s)$ имеет в точке $s = 0$ нуль первого порядка, а знаменатель — нуль второго порядка. Следовательно, функция $G(s)$ имеет в точке $s = 0$ простой полюс. Так как

$$\frac{d}{ds}[(1-v)I_1(s) - sI_0(s)]_{s=0} = -\frac{1+v}{2},$$

то вычет относительно полюса $s = 0$ равен

$$\operatorname{Re} s G(s=0) = -\frac{r}{1+v}.$$

Теперь рассмотрим полюса $s = \pm i\omega_n$. В этих точках числитель подынтегральной функции не имеет нулей, а знаменатель имеет нуль первого порядка, поэтому подынтегральная функция $G(s)$ в точках $s = \pm i\omega_n$, где ω_n ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяют уравнению (6), имеет также простой полюс. Так как

$$\frac{d}{ds}[(1-v)I_1(s) - sI_0(s)]_{s=\pm i\omega_n} = -\frac{\omega_n^2 - (1-v^2)}{1-v} J_0(\omega_n),$$

то вычеты относительно полюсов $s = \pm i\omega_n$ будут равны

$$\operatorname{Re} s G(s = \pm i\omega_n) = \frac{J_1(r\omega_n) e^{\pm i\omega_n t}}{\omega_n J_0(\omega_n) \frac{\omega_n^2 - (1-v^2)}{1-v}}.$$

Тогда по формуле (8) с учетом того, что задача линейна и сумма частных решений также является решением, получаем значение первого интеграла в (5), справедливое при $t > 1 - r$:

$$u_r^I(r, t) = -\frac{r}{1+v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\omega_n r)}{(\omega_n^2 - 1 + v^2)J_1(\omega_n)} \cos(\omega_n t). \quad (9)$$

Выражение (9) является решением задачи для нагрузки $f(t) = H(t)$ и представляет разложение в ряд по собственным формам колебаний, причем первое слагаемое в (9) является решением соответствующей статической задачи. Заметим, что по времени ряд (9) представляет собой ряд Фурье, сумма коэффициентов которого, в свою очередь, является разложением первого слагаемого в (9) в ряд Дини:

$$g(r) = \frac{r}{1+v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\omega_n r)}{(\omega_n^2 - 1 + v^2)J_1(\omega_n)}. \quad (10)$$

Второй интеграл в (5) отличается от первого лишь множителем e^{-sT} , поэтому, применив к нему теорему запаздывания, сразу можно найти требуемое решение задачи для нагрузки в виде прямоугольного импульса, а затем по формулам (2) определить напряжения. Однако вычисления показывают, что это нецелесообразно: в силу очень слабой сходимости рядов Фурье — Дини типа (10) не удастся получить физически достоверной картины распространения волны от боковой поверхности к оси бруса. Для улучшения сходимости требуется применение специальных приемов. Поскольку в данном случае нас интересуют сравнительно небольшие времена от момента возбуждения импульса, то можно воспользоваться асимптотическим разложением модифицированных функций Бесселя в пространстве изображений, после чего применить обратное преобразование

Лапласа. Для первой сходящейся волны такое приближение вполне приемлемо. Представляет интерес профиль волны радиального напряжения.

Используя формулы (2) и (4), выражение для трансформанты радиального напряжения запишем в виде

$$\bar{\sigma}_r(r, s) = -\frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) \frac{(1-\nu) \frac{1}{r} I_1(rs) - s I_0(rs)}{(1-\nu) I_1(s) - s I_0(s)}. \quad (11)$$

Для больших значений аргумента асимптотическое разложение функций Бесселя мнимого аргумента $I_0(z)$ и $I_1(z)$ имеет вид

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{128z^2} + \frac{75}{1024z^3} + \frac{3675}{32768z^4} + \dots \right];$$

$$I_1(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[\frac{1 - \frac{3}{8z} - \frac{15}{128z^2} - \frac{105}{1024z^3} - \frac{4725}{32768z^4} - \dots \right]. \quad (12)$$

Ограничимся далее лишь членами ряда, содержащими s^{-n} со степенями $n > -2$. Дальнейшие преобразования сводятся к подстановке (12) при $z = r$, rs в (11) и почленному обращению получающегося ряда. Коэффициенты последнего находятся по правилам деления двух степенных рядов

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}; c_1 = \frac{a_1 - c_0 b_1}{b_0}; c_2 = \frac{a_2 - c_0 b_2 - c_1 b_1}{b_0};$$

$$c_3 = \frac{a_3 - c_0 b_3 - c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_0}; \dots$$

В пространстве изображений получим

$$\bar{\sigma}_r(r, s) \approx -\frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) \frac{e^{-s(1-r)}}{\sqrt{r}} \left[1 + \frac{A_r}{s} + \frac{B_r}{s^2} + O(s^{-3}) \right];$$

$$A_r = -\frac{1-r}{r} \left(\frac{7}{8} - \nu \right);$$

$$B_r = -\frac{1-r}{r} \left[\left(\frac{7}{8} - \nu \right)^2 - \left(\frac{57}{128} - \frac{3\nu}{8} \right) \left(\frac{1}{r} + 1 \right) \right].$$

В пространстве оригиналов с учетом теоремы запаздывания находим

$$\sigma_r(r, t) \approx -\frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ H(t+r-1) - \left[1 + A_r(t+r-1) + B_r \frac{(t+r-1)^2}{2} \right] - H(t+r-1-T) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + A_r(t+r-1-T) + B_r \frac{(t+r-1-T)^2}{2} \right] \right\}.$$

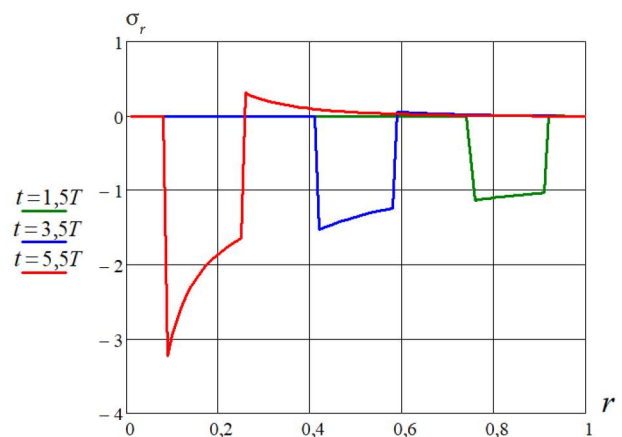
Результаты и обсуждение

На рисунке приведен профиль волны радиального напряжения σ_r для материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,30$ при продолжительности импульса $T = 1/6$ для трех моментов времени: $t = 1,5T$; $t = 3,5T$ и $t = 5,5T$.

Как видно на рисунке, радиальное напряжение после снятия сжимающей нагрузки становится растягивающим и возрастает по мере продвижения к оси бруса. При достаточно большой амплитуде нагрузки это может привести к разрушению материала уже в первой сходящейся волне сжатия. Отметим, что эволюция импульса напряжения при его движении к оси бруса будет описываться с тем большей точностью, чем большее количество членов будет удержано в асимптотическом разложении функций Бесселя в решении.

Выводы

При внезапном снятии сжимающей нагрузки возникает ограниченная область, в которой напряжение становится растягивающим.



Радиальное напряжение в первой сходящейся волне

вающим, что может вызвать разрушение уже в первой сходящейся волне. При отражении фронта волны от оси напряжение будет менять знак, что приведет к возникновению растягивающего напряжения большой амплитуды. Это, в свою очередь, может инициировать образование полости или привести к появлению зоны дробления в окрестности оси бруса.

Библиографический список

1. Hata T. Reconsideration of the Stress-Focusing Effect in a Uniformly Heated Solid Cylinder // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1994. Vol. 61. No 3. Pp. 676–680.
2. Hata T. Stress-Focusing Effect in a Uniformly Heated Solid Sphere // *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1991. Vol. 58. No 1. Pp. 58–63.
3. Ho C.-H. Stress-Focusing Effect in a Uniformly Heated Cylindrical Rod // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1976. Vol. 43. No 3. Pp. 464–468.
4. Nelson C. W. The Ramp Unloading Case of Transient Axially-symmetric Excitation of a Circular Elastic Rod in Plane Strain // *Journal of the Franklin Institute*. 1969. Vol. 287. No 2. Pp. 125–142.
5. Nelson C. W. Transient Axially Symmetric Excitation of a Circular Elastic Rod in Plane Strain // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1968. Vol. 35. No 2. Pp. 306–312.
6. Nowak M. J. The Simplest Extensional Vibration of a Circular Disk // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1962. Vol. 29. No 2. Pp. 437–439.
7. Головкин А. П., Лобышев В. Л., Михайлов А. М. Колебания акустической среды в цилиндрической полости при нестационарном деформировании ее поверхности // *Прикладная механика*. 1989. Т. 25. № 12. С. 53–62.
8. Pertsev A. K., Yakovlev S. V. Non-stationary forces taken place under dynamic loads acting on an elastic circular cylindrical shell // *Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems: Proc. XXV–XXVI Summer Schools held in Repino, St. Petersburg, Russia, July 1–8, 1997 and July 1–10, 1998*. Vol. 2. St. Petersburg, 1998. Pp. 357–369.
9. Вороненко Е. Я. Применение степенных рядов для определения внешних сил в задачах о взаимодействии конструкций с жидкостью // *Тр. НТО судостроительной промышленности им. А. Н. Крылова*. Вып. 108. Л.: Судостроение, 1968. С. 99–102.
10. Горяинов Ю. В. Давление, возникающие на внутренней поверхности заполненной жидкостью цилиндрической оболочки при ее нестационарном движении // *Тр. НТО судостроительной промышлен-*

ности им. А. Н. Крылова. Вып. 108. Л.: Судостроение, 1968. С. 113–118.

11. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / под ред. А. В. Кармишина. М.: Машиностроение, 1989. 288 с.

12. Петров Ю. В., Уткин А. А. Разрушение предварительно нагруженного шара при внезапном снятии нагрузки // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 1999. Вып. 2. С. 86–89.

13. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1985. 176 с.

14. Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.

15. Степанов Г. В. Распространение упругой цилиндрической волны в тонком диске // *Проблемы прочности*. 1983. № 11. С. 7–10.

16. Бахрах С. М., Ковалев Н. П., Надикто Б. А., Новиков С. А., Чернышев А. К. Исследование пластических и прочностных свойств меди в условиях всестороннего растяжения // *Доклады АН СССР*. 1974. Т. 215, № 5. С. 1090–1093.

17. Зельдович В. И., Литвинов Б. В., Пурегин Н. П., Ринкевич О. С., Бузанов В. И., Хейфец А. Э., Хомская И. В. Квазисферическое взрывное нагружение стали с давлением до 200 ГПа // *Доклады РАН*. 1995. Т. 343, № 5. С. 621–624.

18. Козлов Е. А., Коваленко Г. В., Литвинов Б. В., Уваров А. И., Теплов В. А. Особенности деформации и разрушения аустенитной стали 60Х3Г8Н8Ф в сферических волнах напряжений // *Доклады РАН*. 1998. Т. 358, № 2. С. 189–192.

19. Морозов Н. Ф., Бригаднов И. А., Индейцев Д. А., Петров Ю. В., Фрейдин А. Б. Энергетические оценки фазовых превращений в шаре под действием сферически сходящейся волны сжатия // *Доклады РАН*. 2001. Т. 377, № 6. С. 769–771.

20. Соколов Е. В., Видюшенков С. А. Пластинки и оболочки вращения с разрывными грузовыми и жесткостными характеристиками. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 264 с.

21. Соколов Е. В., Видюшенков С. А. Аналитические методы решения задач теории пластин и оболочек вращения с применением разрывных функций. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 374 с.

References

1. Hata T. Reconsideration of the stress-focusing effect in a uniformly heated solid cylinder. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1994, vol. 61, no 3, pp. 676–680.

2. Hata T. Stress-focusing effect in a uniformly heated solid sphere. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1991, vol. 58, no 1, pp. 58–63.
3. Ho C.-H. Stress-focusing effect in a uniformly heated cylindrical rod. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1976, vol. 43, no. 3, pp. 464–468.
4. Nelson C. W. The ramp unloading case of transient axially-symmetric excitation of a circular elastic rod in plane strain. *Journal of the Franklin Institute*, 1969, vol. 287, no 2, pp. 125–142.
5. Nelson C. W. Transient Axially Symmetric Excitation of a Circular Elastic Rod in Plane Strain. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1968, vol. 35, no 2, pp. 306–312.
6. Nowak M. J. The simplest extensional vibration of a circular disk. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1962, vol. 29, no 2, pp. 437–439.
7. Golovkin A. P., Lobyshev V. L., Mikhaylov A. M. *Kolebaniya akusticheskoy sredy v tsilindricheskoy polosti pri nestatsionarnom deformirovanii ee poverkhnosti* [Vibrations of the acoustic medium in the cylindrical cavity at unsteady deformation of its surface]. *Prikladnaya mekhanika – Applied Mechanics*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 53–62.
8. Pertsev A. K., Yakovlev S. V. Non-stationary forces taken place under dynamic loads acting on an elastic circular cylindrical shell. *Proceedings of Summer Schools XXV–XXVI held in Repino, St. Petersburg, Russia, July 1–8, 1997 and July 1–10, 1998 “Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems”*. Vol. 2. St. Petersburg, 1998, pp. 357–369.
9. Voronenok E. Ya. *Primenenie stepennykh ryadov dlya opredeleniya vneshnikh sil v zadachakh o vzaimodeystvii konstruktivnykh zhidkost'yu* [Use of power series to determine external forces in problems about the interaction of structures with liquid]. *Trudy NTO sudostroitel'noy promyshlennosti im. A. N. Krylova* [Proceedings of the NTO of the shipbuilding industry named after A. N. Krylov], Iss. 108. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1968, pp. 99–102.
10. Goryainov Yu. V. *Davlenie, vznikayushchie na vnutrenney poverkhnosti zapolnennoy zhidkost'yu tsilindricheskoy obolochki pri ee nestatsionarnom dvizhenii* [Pressure arising on the inner surface of the cylindrical shell filled with liquid during its unsteady movement]. *Trudy NTO sudostroitel'noy promyshlennosti im. A. N. Krylova* [Proceedings of the NTO of the shipbuilding industry named after A. N. Krylov]. Iss. 108, Leningrad, Sudostroenie Publ., 1968, pp. 113–118.
11. *Metody dinamicheskikh raschetov i ispytaniy tonkostennykh konstruktivnykh* [Methods of dynamic calculations and tests of thin-walled structures]. Ed. by Karmishin A. V. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 288 p.
12. Petrov Yu. V., Utkin A. A. *Razrushenie predvaritel'no nagruzhennogo shara pri vnezapnom snyatii nagruzki* [Destruction of pre-loaded ball at sudden load removal]. *Vestnik SPbGU ser. 1 – Bulletin of St. Petersburg State University, ser. 1*, 1999, iss. 2, pp. 86–89.
13. Senitskiy Yu. E. *Issledovanie uprugogo deformirovaniya elementov konstruktivnykh pri dinamicheskikh vozdeystviyakh metodom konechnykh integral'nykh preobrazovaniy* [Study of elastic deformation of structural elements under dynamic impacts by the method of finite integral transformations]. Saratov, Saratov University Publ., 1985, 176 p.
14. Slepyan L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Non-stationary elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1972, 374 p.
15. Stepanov G. V. *Rasprostraneniye uprugoy tsilindricheskoy volny v tonkom diske* [Propagation of elastic cylindrical wave in thin disk]. *Problemy prochnosti – Strength Problems*, 1983, no. 11, pp. 7–10.
16. Bakhrakh S. M., et al. *Issledovanie plasticheskikh i prochnostnykh svoystv medi v usloviyakh vsestoronnego rastyazheniya* [Study of plastic and strength properties of copper under conditions of comprehensive stretching]. *Doklady AN SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1974, vol. 215, no. 5, pp. 1090–1093.
17. Zeldovich V. I., et al. *Kvazisfericheskoe vzryvnoe nagruzhenie stali s davleniem do 200 GPa* [Quasi-spherical explosive loading of steel with pressure up to 200 GPa]. *Doklady RAN – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1995, vol. 343, no. 5, pp. 621–624.
18. Kozlov E. A., et al. *Osobennosti deformatsii i razrusheniya austenitnoy stali 60Kh3G8N8F v sfericheskikh volnakh napryazheniy* [Features of deformation and fracture of austenitic steel 60Kh3G8N8F in spherical stress waves]. *Doklady RAN – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1998, vol. 358, no. 2, pp. 189–192.
19. Morozov N. F., et al. *Energeticheskie otsenki fazovykh prevrashcheniy v share pod deystviem sfericheskikh skhodyashchetsya volny szhatiya* [Energy estimates of phase transformations in a ball under the action of a spherically converging compression wave]. *Doklady RAN – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2001, vol. 377, no. 6, pp. 769–771.
20. Sokolov E. V., Vidyushenkov S. A. *Plastinki i obolochki vrashcheniya s razryvnymi gruzovymi i zhestkostnymi kharakteristikami* [Plates and shells of rotation with breaking cargo and stiffness characteristics]. St. Petersburg, Politekh. universitet Publ., 2010, 264 p.
21. Sokolov E. V., Vidyushenkov S. A. *Analiticheskie metody resheniya zadach teorii plastin i obolochek vrashcheniya s primeneniem razryvnykh funktsiy* [Analytical methods for solving problems of the theory of plates and shells of rotation using breaking functions]. St. Petersburg, Politekh. universitet Publ., 2012, 374 p.